HISTORIA Y ORIGEN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL
(1713-14)
GM V 392-410

[392] Es muy útil conocer los verdaderos orígenes de los descubrimientos memorables, sobre todo de aquéllos que se revelaron no por casualidad sino por la fuerza de la meditación. Pues ello sirve no sólo para que la Historia literaria adjudique a cada cual lo suyo y sean los otros invitados a parecidas alabanzas, sino también a fin de que se incremente el arte de la invención una vez conocido el método a través de ilustres ejemplos. Entre los descubrimientos más nobles de este tiempo uno es el nuevo género de Análisis matemático conocido bajo el nombre de cálculo diferencial, de cuya naturaleza, aunque ya bien explicada hoy, se desconoce aún públicamente el origen y [393] la razón de su hallazgo. Hace ya unos cuarenta años que su autor lo descubrió y, tras nueve años, de ello hace ahora más o menos treinta, lo publicó de forma resumida. Fue celebrado el invento no sólo con elogios, sino con su aplicación, pues gracias a él se han conseguido muchos excelentes descubrimientos y ahí están, publicados, primero en las *Acta Eruditorium* de Leipzig y luego en la Academia Real de las Ciencias, los ensayos y memorias que han hecho visible el nuevo rostro de la matemática. Nadie había dudado de su verdadero inventor hasta que últimamente, en el año del Señor 1712, algunos hombres nuevos, ya sea por ignorancia de lo escrito en tiempos pasados, ya por envidia o por la esperanza de brillar en las polémicas, o finalmente por adulación, le han suscitado un rival, al que, por cierto, tales alabanzas han dejado no poco desprestigiado, pues mejor le habría ido sin lo que como consecuencia de esta disputa ha quedado manifiesto. Con astucia han obrado al diferir la polémica hasta después de la muerte de aquéllos que eran conocedores de estas cosas, Huygens, Wallis, Tschirnhaus y otros, con cuyo testimonio habrían podido ser desmentidos. Esta es, entre otras, la razón por la cual se establecen en Derecho limitaciones temporales, ya que con culpa o con engaño por parte del querellante podría diferirse la demanda hasta que al adversario se le acaben los argumentos con los que pueda defenderse. Han tergiversado, además, el estado de la controversia, pues en su escrito, que editaron bajo el título de *Commercium Epistolicum Collinsii* 1712 con el fin de poner en duda la palma de Leibniz, apenas aparece nada acerca del cálculo diferencial: todo él lo ocupan las series que llaman infinitas. El primero que las descubrió mediante división y las dio a conocer públicamente fue *Nicolás Mercator* de Holstein, pero fue *Isaac Newton* quien formuló el problema general por extracción. Invento útil, sin duda, que traslada las aproximaciones aritméticas al cálculo analítico, pero en ningún modo al cálculo diferencial. Ellos utilizan, además, este sofisma: cada vez que aquel rival trabaja alguna cuadratura mediante la adición de aquellos elementos que incrementan la figura, en seguida proclaman que ha utilizado el cálculo diferencial (por ejemplo, pág. 15 de *Commercium*). Pero, si así fuera, habrían estado en posesión del cálculo diferencial *Kepler* (con su 'cuba austríaca'), *Cavalieri, Fermat, Huygens, Wallis,* y quienes no trataban los indivisibles o infinitamente pequeños. Pero Huygens, que ciertamente no ignoraba estos métodos de fluxiones que ellos conocen y de los que se jactan, fue de tal honestidad que reconoció que con este cálculo se abría para la Geometría una nueva luz y se ensanchaba admirablemente su fortín. Pues bien, a nadie antes que a Leibniz le vino a la mente la construcción de un algoritmo para este nuevo cálculo, mediante el que se liberara a la imaginación de aquella interminable sujeción a la figuras, que *Vieta* y *Descartes* habían formulado en su Geometría común o apoloniana, [394] y se alcanzaran cosas más elevadas que pertenecen a la Geometría arquimédea y a aquellas líneas que, llamándolas mecánicas, explícitamente Descartes había excluido del cálculo. Así pues, con el nuevo cálculo de Leibniz, toda la Geometría, en su integridad, queda sometida a un cálculo analítico, y aquellas líneas cartesio-mecánicas, que él ahora llama transcendentes, pueden ser también reducidas a ecuaciones locales mediante la consideración de las diferencias dx, ddx, etc y de las sumas, recíprocas a las diferencias, todas ellas introducidas ahora en el cálculo como funciones de x, cuando antes sólo se utilizaban $x, xx, x^3, \sqrt{x}, etc$ como funciones de cantidades, esto es, potencias y raíces. Puede así comprenderse que aquéllos que, como Fermat, Descartes o incluso el rival mismo en sus *Principia* editados en 1687, expresaban aquellas cantidades

mediante el 0, estaban muy lejos todavía del cálculo diferencial, pues de esa manera no es posible discernir ni el grado de las diferencias ni las funciones diferenciales de las diversas cantidades. No hay el más mínimo vestigio de que alguien hubiera fabricado estas cosas antes que Leibniz. Con el mismo derecho con que los adversarios reivindican ahora para Newton estas cosas, podría cualquiera reivindicar el análisis de Descartes en favor de Apolonio, por ejemplo, que conoció el problema del cálculo, pero no el cálculo mismo. De igual manera, los nuevos hallazgos realizados con el cálculo diferencial han quedado ocultos a los discípulos de Newton, nada de alguna importancia han podido aportar ni han logrado evitar paralogismos hasta que ha aparecido el cálculo leibniziano, tal como los intentos de David Gregory respecto de la catenaria han puesto de manifiesto [GM V 336-339]. Se han atrevido, incluso, estos enredadores a abusar del nombre de la Sociedad Real Inglesa, la cual ha hecho saber más tarde que sobre este conflicto nada definitivo había ella pronunciado, actitud digna de su equidad ya que ni habían sido oídas las dos partes ni nuestro (autor) sabía siquiera que la Sociedad hubiera abordado el problema: pues, en tal caso, deberían haberle comunicado los nombre de los relatores designados, a fin de que pudieran ser recusados o aceptados por él. De manera que, sorprendido en su buena fe no por argumentos sino por falacias, los consideró indignos de respuesta, convencido de que no valía la pena entablar litigio ante los no expertos en esta materia (esto es, la mayor parte de los lectores), mientras que los conocedores del problema debatido fácilmente reconocerían la iniquidad de las imputaciones. Añádase a ello que estaba él ausente de casa cuando fueron propaladas por sus adversarios todas estas cosas, y, habiendo regresado después de dos años y ocupado en otros asuntos, no pudo encontrar y consultar lo que quedaba de su antigua correspondencia literaria, que pudiera permitirle contrastar por sí mismo hechos acaecidos tan antiguos, de más de cuarenta años; no había conservado los autógrafos de la mayor parte de las cartas escritas por él en aquellos tiempos, ni tenía tampoco la mayoría de las encontradas en Inglaterra, que Wallis editó con su consentimiento en el Tomo tercero de sus *Opera.* [395] No faltaron, sin embargo, amigos que se preocuparan por su fama; y en concreto, *un matemático de nuestro tiempo, de primer rango, profundísimo conocedor de la materia y neutral,* cuya aquiescencia en vano pretendió captar con artimañas la parte contraria, se pronunció sinceramente con argumentos añadidos de su propio saber, pero guardándose de que no se supiera públicamente que a él le parecía que aquel rival no sólo no descubrió el cálculo diferencial sino que ni siquiera lo entendió adecuadamente. También otro amigo del inventor dio a conocer esto y alguna otra cosa en un breve artículo, a fin de rechazar tan vanas arrogancias [cfr. supra INTERLUDIO II la carta 244 de Bernoulli a Leibniz, 7/6/1713].

Pero lo que ahora importaba era, sobre todo, poner de manifiesto el proceso y la razón que condujeron al descubridor a este nuevo género de cálculo; pues hasta el presente todo ello es ignorado públicamente, incluso quizás por aquéllos mismos que quisieran estar de parte del invento. Por eso, el autor había decidido exponerlo él mismo y narrar la evolución de sus estudios analíticos, ayudándose en parte de la memoria y en parte de los escritos que se conservan y de lo que queda de algunos de sus viejos papeles, e ilustrar así en un opúsculo ajustado la Historia de esta Matemática más profunda y del arte mismo de la invención. Pero, al no poderlo hacer él mismo ahora personalmente debido a sus otras necesarias ocupaciones, ha permitido que este compendio de lo que debe decir de su parte vea la luz y satisfaga en alguna medida la pública curiosidad a través de un amigo competente.

El autor de este nuevo Análisis, ya desde la primera flor de la edad y guiado por una suerte de instinto innato, había ampliado sus estudios de Historia y de Jurisprudencia con otras meditaciones más profundas; entre ellas, se deleitaba con las propiedades de los números y sus combinaciones, y en el a. D. 1666 editó ya un opúsculo sobre el Arte Combinatorio, reeditado después sin su consentimiento. Siendo todavía niño, había advertido, al estudiar la lógica, que el último análisis de las verdades que dependen de la razón se reducía a estas dos cosas: definiciones y verdades idénticas, las únicas verdaderamente primitivas e indemostrables entre las necesarias; y cuando se le objetaba que las verdades idénticas son inútiles y engañosas, él mostraba lo contrario incluso con experimentos, y entre otros, ya entonces mostró que aquel gran Axioma ‘el todo es mayor que la parte’ se demostraba mediante un silogismo cuya proposición mayor era una definición, y la menor una proposición idéntica. Pues, si de dos cosas una es igual a una parte de la otra, aquélla podría llamarse *menor* y ésta *mayor*, lo cual es una definición. Ahora bien, si a esta definición se le añade este axioma de identidad e indemostrable que dice ‘todo lo que está dotado de magnitud es igual a sí mismo’, esto es, $A = A$, se produce el siguiente silogismo: [396] todo lo que es igual a una parte de otro es menor que éste otro (por definición). Es así que esta parte es igual a la parte del todo (o sea, es igual a sí misma, por ser verdad idéntica). Luego la parte es menor que el todo. Q.E.D. Prosiguiendo desde aquí observaba que de $A = A$ ó $A - A = 0$, proposición verdaderamente idéntica y, a primera vista, completamente despreciable, se producía una hermosísima propiedad de las diferencias, pues

$$A - \underbrace{A + B}_{+L} - \underbrace{B + C}_{+M} - \underbrace{C + D}_{+N} - \underbrace{D + E}_{+P} - E \text{ será } = 0$$

Si suponemos ahora que A, B, C, D, E son cantidades crecientes y a sus diferencias próximas $B - A, C - B, D - C, E - D$ las llamemos L, M, N, P, se produce:

$$A + L + M + N + P - E = 0$$

o también:

$$L + M + N + P = E - A$$

esto es, la suma de cualesquiera diferencias próximas es igual a la diferencia entre los términos extremos. Por ejemplo, si en el lugar de $A, B, C, D, E, F,$ se toman los números cuadrados $0,1,4,9,16,25$, entonces en el lugar de las diferencias aparecerán los números impares 1,3,5,7,9,

0		1		4		9		16		25
	1		3		5		7		9	

donde es manifiesto que $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 - 0 = 25$

y $3 + 5 + 7 + 9 = 25 - 1 = 24$, y el mismo lugar obtendríamos, cualquiera que fuera el número de términos o de diferencias y cualesquiera que fueran los términos extremos que tomemos. Complacido por tan fácil y divertida observación, nuestro adolescente probó con otras series numéricas y avanzó hacia diferencias segundas o diferencias de diferencias, a diferencias terceras o diferencias entre diferencias de diferencias, y así sucesivamente. Observó, así, que se desvanecían las diferencias segundas de los números naturales o en el orden de los tomados desde 0; que también se desvanecían las terceras desde las de los números cuadrados; las cuartas desde la de los cubos; las quintas desde las de los bicuadrados; las sextas desde las de los subsólidos, y así sucesivamente; igualmente observó que la diferencia primera de los naturales , 1, era constante; así también la segunda de los cuadrados, 1.2=2; la tercera de los cubos, 1.2.3=6; la cuarta de los bicuadrados, 1.2.3.4=24; la quinta de los subsólidos, 1.2.3.4.5=120, y así sucesivamente; de manera que lo que para otros era algo ya conocido, era para él nuevo, y aquel fácil placer le invitaba a proseguir. Pero sobre todo meditó en lo que él llamaba números combinatorios, de los que es ya conocida esta Tabla, donde una serie horizontal o vertical precedente contiene siempre las diferencias primeras de la serie inmediata siguiente, las segundas de la serie siguiente, [397] las terceras de la tercera, etc, y cualquier serie horizontal o vertical contiene las sumas de la serie inmediata precedente, las sumas de las sumas o sumas segundas de la serie precedente segunda, las terceras de la tercera. Pero, a fin de añadir algo seguramente nada vulgar, extrajo algunos teoremas generales sobre diferencias y sumas, que son los siguientes. En la serie *a,b,c,d,e,* etc infinita decreciente tenemos los términos y las diferencias primeras, segundas, terceras, cuartas, etc.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
		etc.	etc.		

Termini		a	b	c	d	e	etc.
differentiae	1mae	f	g	h	i	k	etc.
	2dae	l	m	n	o	p	etc.
	3tiae	q	r	s	t	u	etc.
	4tae	β	γ	δ	ε	ϑ	etc.
	etc.	λ	μ	ν	ϱ	σ	etc.

Puesto ahora a como primer término, y ω como último, descubría que

$$\begin{array}{l}
a-\omega=1f+1g+1h+1i+1k+\text{etc.}\\
a-\omega=1l+2m+3n+4o+5p+\text{etc.}\\
a-\omega=1q+3r+6s+10t+15u+\text{etc.}\\
a-\omega=1\beta+4\gamma+10\delta+20\varepsilon+35\vartheta+\text{etc.}\\
\quad\text{etc.}
\end{array}$$

y de nuevo

$$a-\omega=\left\{\begin{array}{lllll}
+1f & & & & \\
 & -1l & & & \\
+1f & & +1q & & \\
 & -2l & & -1\beta & \\
+1f & & +3q & & +1\lambda \\
 & -3l & & -4\beta & \\
+1f & & +6q & & \text{etc.} \\
 & -4l & & \text{etc.} & \\
+1f & & \text{etc.} & & \\
 & \text{etc.} & & & \\
\text{etc.} & & & &
\end{array}\right.$$

A partir de aquí, hablando en el estilo introducido más tarde por él y llamando y al término de la serie (y en este caso también $a=y$) se podría llamar dy a la primera diferencia, ddy a la segunda, d^3y a la tercera, a la cuarta d^4y; y llamando x al término de otra serie, se podría llamar $\int x$ a la suma de estos términos, $\iint x$ a la suma de las sumas o suma segunda, $\int^3 x$ a la suma tercera, $\int^4 x$ a la suma cuarta. Así pues, suponiendo que $1+1+1+1etc=x$, siendo x números naturales, de los que $dx=1$, tenemos

$$\begin{array}{l}
\quad\ 1+2+3+4+5\ \text{etc. fit}=\int x\\
\text{et}\ 1+3+6+10+\ \text{etc. fit}=\iint x\\
\text{et}\ 1+4+10+20+\ \text{etc. fit}=\int^3 x\\
\text{et}\ 1+5+15+35+\ \text{etc.}=\int^4 x
\end{array}$$

[398] y así sucesivamente. De donde finalmente:

$$y-\omega=dy.x-ddy.\int x+d^3y.\iint x-d^4y.\int^3 x+etc$$

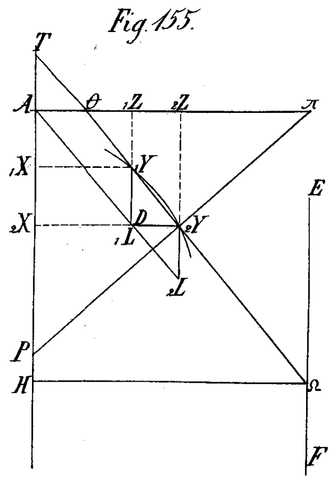
que es $=y$, suponiendo que el proceso continúa al infinito, esto es, $\omega=0$. Pero también de aquí se sigue la suma de la serie, esto es:

$$\int y=yx-dy.\int x+ddy.\iint x-d^3y.\int^3 x+etc$$

Lo extraordinario de estos dos teoremas es que ambos se verifican igualmente en los dos cálculos diferenciales, tanto en el numérico como en el infinitesimal, sobre cuyas distintas características hablaremos luego.

Nuestro adolescente desconocía entonces por completo la aplicación de las verdades numéricas a la Geometría y el tratamiento de las series infinitas; bastante tenía con el placer de observar todas aquellas cosas en las series de los números. Tampoco de la Geometría dominaba nada que fuera más allá de los preceptos prácticos más comunes y apenas había mirado con mediana atención a Euclides, dedicado como estaba a otros estudios completamente distintos. La suerte quiso, sin embargo, que cayera en sus manos la *Vincentii Leotaudi Amoenior Curvilineorum Contemplatio,* donde el autor trataba diversas cuadraturas de lúnulas, y la *Cavallierii Geometria Indivisibilium*, con lo que a poco de repasar estos últimos, ya se deleitaba con la sencillez de sus métodos, aun sin la menor intención, por el momento, de sumergirse en aquella Matemática más profunda, a pesar de que ciertamente se entregó en seguida al estudio de la Física y de la Mecánica práctica, como puede colegirse por la publicación de su opúsculo *Hypothesis Physica*. Estaba entonces adscrito al Consejo de Apelación del Eminentísimo Elector de Mainz y, tras obtener del Graciosísimo y Justísimo Príncipe (que había reclutado para sí a aquel joven llamado a pasar por allí y caminar más lejos) el permiso para continuar su peregrinación, marchó a la Lutecia de los Parisinos en el año del Señor 1672. Allí conoció al grandísimo varón *Christian Huygens,* a cuyo ejemplo y consejos siempre confesó deber su acceso a la Matemática más elevada. Ocurrió que precisamente por aquel entonces había publicado aquél su obra *De Pendulis*, y habiéndole obsequiado con un ejemplar y advertido durante la conversación que el joven carecía de un conocimiento adecuado de la naturaleza del centro de gravedad, en qué consistía y cómo podía investigarse, se lo explicó en pocas palabras. Esto despertó a nuestro joven de su modorra, y le hizo considerar que era indigno ignorar tales cosas. No obstante, por el momento no pudo dedicarse a estos estudios, y al final del año pasó a Inglaterra en la comitiva de la Legación de Mainz; allí permaneció unas pocas semanas en compañía del Legado y fue introducido por la mediación de Henry Oldenburg, Secretario de la Royal Society, en aquel Ilustre Colegio; pero con nadie habló sobre Geometría (en la que él entonces era completamente proletario), aunque, interesado como estaba en la Química, tuvo acceso en algunas ocasiones al ilustre varón *Robert Boyle*; allí ocasionalmente se encontró con Pell [399] y, al exponerle algunas observaciones propias numéricas, Pell le manifestó que todo aquello no era nuevo y que no hacía mucho *Nicolás Mercator* había mostrado públicamente en su Cuadratura de la Hipérbola que las diferencias de las potencias numéricas continuadas terminaban por desvanecerse. Esto indujo a nuestro joven a buscar el libro de Nicolás Mercator. A *Collins* no lo conoció entonces; con Oldenburg sólo habló de cuestiones literarias, físicas y mecánicas; de la Geometría más profunda lo mismo que de las series aquellas de Newton no intercambió con él ni una palabra; y que de todo esto era él completamente ignorante y sólo versado, y aun de forma muy mediocre, acerca de las propiedades de los números se muestra bastante bien en las cartas mismas que intercambió con Oldenburg, que acaban de ser publicadas por los adversarios; lo mismo se podría observar con evidencia en aquéllas otras que, según escriben, aún se conservan en Inglaterra, pero que las han suprimido, supongo que quizás porque de ellas se desprendía que sobre cuestiones geométricas no tuvo él con Oldenburg ningún intercambio, mientras que ellos quieren hacer creer (sin aportar indicio alguno) que ya entonces Oldenburg le comunicó lo que sabía acerca de lo que Collins, Gregory y Newton habían tratado.

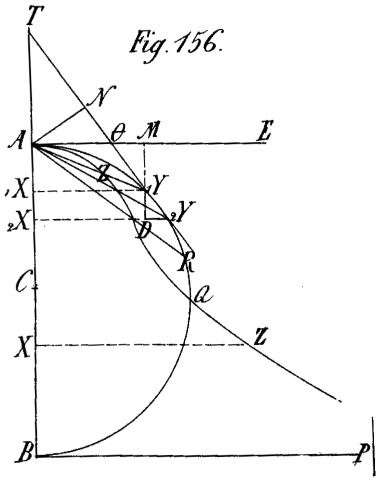
Una vez vuelto de Inglaterra a Francia en el a. D. 1673, y muerto entre tanto el Eminentísimo Elector Maguntino, por cuya gracia había él permanecido en Mainz, animado por Huygens empezó a ocuparse con más libertad del análisis de Descartes (que antes apenas de lejos había saludado), y a fin de sumergirse en la Geometría de las cuadraturas, consultó la *Synopsis Geometrica* de Honorato Fabri, a Gregorio de S. Vicente y el libro de Detonville (o sea, Pascal). Y fue precisamente en un ejemplo de Detonville donde se le manifestó de repente una luz, que el propio Pascal (cosa admirable) no había vislumbrado. Pues cuando él demuestra el teorema arquimédeo de la superficie de la esfera o la medida de sus partes, utiliza un método según el cual toda superficie de un sólido descrito por la rotación en torno a un eje puede reducirse a una figura plana proporcional. A partir de aquí nuestro joven formuló el siguiente teorema general: Las porciones de una recta perpendicular a una curva, interceptadas entre el eje y la curva, aplicadas ordenadamente y como normales al eje, producen una figura proporcional al momento de la curva desde el eje. Cuando se lo mostró a Huygens, éste lo aprobó y le confesó que también él, con la ayuda de este mismo teorema, había descubierto hacía muchos años en su *Horologium Oscilatorium* pero sin demostración, la superficie de la conoide parabólica y de otras superficies semejantes. Entusiasmado con ello, nuestro autor, viendo la fecundidad de estas meditaciones, cuando hasta entonces sólo había considerado los infinitamente pequeños como intervalos de ordenadas al modo de Cavalieri, imaginó un triángulo [400] que llamó *característico,* ${}_1YD_2Y$ (fig. 155), cuyos lados $D_1Y,\ D_2Y,$ iguales a ${}_1X_2X,\ {}_1Z_2Z,$ fueran porciones de las coordenadas o coabscisas AX, AZ, y el tercer lado ${}_1Y_2Y$ fuera la porción de la tangente $T\Omega$ (prolónguese, si es necesario). El veía que a este triángulo, aunque inasignable (o infinitamente pequeño), siempre podrían asignársele triángulos semejantes. En efecto, sean AXX, AZZ las condirigentes normales, AX, AZ las coabscisas, YX, YZ las coordenadas, $T\Theta Y$ la tangente, $PY\Pi$ la perpendicular, $XT, Z\Theta$ las subtangentes, $XP, Z\Pi$ las subnormales; finalmente, trácese EF paralela al eje AX y llegue la tangente TY hasta Ω, y, desde ella, sea ΩH la normal



al eje. Tendremos así los triángulos semejantes $_1YD_2Y$, TXY, $YZ\Theta$, $TA\Theta$, YXP, ΠZY, ΠAP, $TA\Omega$, y otros más, si se quiere. De esta manera, por ejemplo, de la semejanza de los triángulos $_1YD_2Y$ y $_2Y_2XP$ tendremos que $P_2Y.{}_1YD={}_2Y_2X.{}_2Y_1Y$, esto es, la perpendicular aplicada P_2Y multiplicada por $_1DY$, esto es, $_1X_2X$ o elemento del eje, será igual a la ordenada $_2Y_2X$ multiplicada por $_1Y_2Y$, elemento de la curva, esto es, igual al momento del elemento de la curva desde el eje. Tenemos así todo el momento de la curva por la suma de las perpendiculares aplicadas al eje. Y por semejanza de los triángulos $_1YD_2Y$ y $TH\Omega$ tendremos que $_1Y_2Y:{}_2YD=T\Omega:\Omega H$, ó $\Omega H.{}_1Y_2Y=T\Omega.{}_2YD$, esto es, la constante ΩH multiplicada por el elemento de la curva $_1Y_2Y$ será igual a $T\Omega$ multiplicada por $_2YD$ ó $_1Z_2Z$, elemento de la coabscisa. Y por lo tanto, la figura plana producida por las $T\Omega$ aplicadas ordenadamente y como normales a AZ en ZZ será igual al rectángulo bajo la curva extendida hacia la recta y la constante $H\Omega$. Así mismo, por la semejanza de los triángulos $_1YD_2Y$ y $_2Y_2XP$ tendremos que $_1YD:D_2Y={}_2Y_2X:{}_2XP$, y por lo tanto, $_2XP.{}_1YD={}_2Y_2X.D_2Y$, esto es, las subperpendiculares $_2XP$ aplicadas ordenadamente al eje, o sea, a $_1YD$ ó $_1X_2X$, serán iguales a las ordenadas $_2Y_2X$ multiplicadas ordenadamente por sus elementos D_2Y. Pero las rectas, creciendo desde cero (a nihilo) multiplicadas por sus elementos, producen un triángulo. En efecto, sea siempre $AZ = ZL$, se producirá el triángulo rectángulo AZL, que es la mitad del cuadrado AZ, de manera que la figura producida por las subperpendiculares aplicadas ordenadamente y perpendicularmente al eje es siempre igual a la mitad del cuadrado de la ordenada. Por consiguiente, dada una figura que queremos cuadrar, se busca aquella figura cuyas subperpendiculares sean iguales a las ordenadas de la figura dada, y ella será la *cuadratriz* de la figura dada. Así, con esta facilísima meditación, tenemos reducidas a cuadraturas planas las superficies engendradas por rotación, conseguimos las rectificaciones de las curvas y, al mismo tiempo, reducimos las cuadraturas de las figuras al problema inverso de las tangentes.

Con estos descubrimientos, nuestro autor expuso en un doble documento la gran potencia de sus teoremas (de los que se seguían muchas cosas elegantes). La primera parte se limitaba a las cantidades asignables, [401] tratadas no sólo al modo de Cavalieri, de Fermat y de Honorato Fabri, sino también al modo de Gregorio de S. Vicente, de Guldin y de Detonville; la segunda dependía de las cantidades inasignables y trasladaba mucho más lejos la Geometría. Pero renunció después a proseguir por aquí, cuando advirtió que no sólo Huygens, Wallis, Wren, Heurat y Neill, sino también James Gregory y Barrow habían utilizado y desarrollado el mismo método. No será inútil, sin embargo, exponerlo todo aquí, a fin de que se vea a través de qué pasos se ha llegado a cosas más grandes y, al mismo tiempo, a fin de que aquéllos que aún se inician en esta Geometría secreta sean conducidos como de la mano a sus cotas más profundas.

Hasta aquí lo que hizo Leibniz en París durante el a. D. 1673 y parte del año 1674. Pero, en el año 1674 (hasta donde ahora puede recordar) se volcó en aquel célebre Tetragonismo Aritmético, cuya idea y construcción puede ser interesante exponer aquí. Solían los geómetras resolver las figuras en rectángulos mediante paralelas trazadas ordenadamente. Pero en cierta ocasión se le ocurrió a él resolver la figura en triángulos mediante rectas concurrentes en un punto, y descubrió cómo de aquí podía deducirse cómodamente algo verdaderamente nuevo. Sea la línea AYR (fig. 156), trácense cuantas AY se quieran, trácesetambién un eje cualquiera AC y su normal o coeje AE y la tangente a la curva Y, que los corte en T y Θ. Desde A trácese AN normal a la tangente. Es manifiesto que el triángulo



elemental A_1Y_2Y es igual a la mitad del rectángulo comprendido bajo el elemento $_1Y_2Y$ de la curva y AN. Observemos ahora el triángulo característico mencionado más atrás $_1YD_2Y$, cuya hipotenusa es la porción de la tangente o elemento del arco, y sus lados son paralelos al eje y al coeje; por la semejanza de los triángulos $AN\Theta$ y $_1YD_2Y$ tenemos que $_1Y_2Y : {}_1YD = A\Theta : AN$, esto es, $A\Theta . {}_1YD$ ó también $A\Theta . {}_1X_2X = AN . {}_1Y_2Y =$ (por lo ya dicho) al doble del triángulo A_1Y_2Y. Así pues, si entendemos
cualquier $A\Theta$ trasladada a XY (trácese, si es necesario), de manera que en esta última se tome XZ, obtendremos el trilíneo $AXZA$ igual al doble del segmento $AY \sim A$ comprendido en la recta AY y el arco $A \sim Y$. Obtenemos así las que él llamaba figuras de segmentos o proporcionales a los segmentos. Mediante un método semejante se procede cuando se toma el punto A fuera de la curva; entonces con este método se tienen los trilíneos proporcionales a los sectores desde dicho punto de concurso con las abscisas. Incluso aunque las rectas no concurran con una línea sino con una curva (a la que tocan ordenadamente), se formarán del mismo modo otros teoremas no menos útiles; pero no es éste el lugar de proseguir por aquí. Para nuestro objetivo basta considerar la figura de segmentos, y observaremos que en el círculo, si el punto A se pone en el inicio del cuadrante AYQ, entonces la curva $AZQZ$ cortará al círculo al final del cuadrante Q, y descendiendo [402] hasta la base BP (normal al diámetro en el otro extremo B) será una asíntota; y sin embargo, toda la figura de longitud infinita comprendida entre el diámetro AB, la base BP, etc y la curva $AZQZ$ asíntota a la base, será igual al círculo con diámetro AB. Pero viniendo ya al círculo, si suponemos el radio como unidad y llamamos x a AX ó ΘZ, z a $A\Theta$ ó XZ, tendremos $x = 2zz :, 1 + zz$; la suma de las x aplicadas a $A\Theta$ o, como hoy decimos, $\int xdz$, es el trilíneo $A\Theta ZA$, complemento del trilíneo $AXZA$, del que ya hemos mostrado que es igual al doble del segmento circular. Lo mismo consiguió nuestro autor mediante el método de las transmutaciones, que envió a Inglaterra. Se trata de sumar todas las $\sqrt{1-xx} = y$. Sea $y = \pm 1 \mp xz$; de aquí será $x = 2z :, 1 + zz$, e $y = \pm zz \mp 1, :, zz + 1$. De esta manera, sólo es necesario una vez más sumar los racionales. Este nuevo y elegante procedimiento ya fue visto por Newton, pero hay que reconocer que no es universal. Ciertamente, con ello se obtiene también el arco desde el seno y cosas parecidas, pero sólo de forma mediata. Más adelante comprendió nuestro autor que Newton ya había deducido todo esto de forma inmediata de sus extracciones, y deseó conocerlo. Comprendió en seguida el método que había utilizado Nicolás Mercator para su Tetragonismo

Aritmético de la hipérbola mediante serie infinita, y también para el del círculo eliminada la asimetría y dividiendo por $1+zz$, en lugar de por $1+z$, como él había hecho. Inmediatamente descubrió nuestro autor el teorema general para la dimensión de una figura cónica dotada de centro. En efecto, el sector comprendido entre el arco de la sección cónica, que empieza en el vértice, y las rectas trazadas desde el centro a sus extremos, es igual al rectángulo bajo el semilado transverso y la recta: $t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7 etc$, tomando t como la porción de la tangente en el vértice, comprendida entre el vértice y la tangente del otro extremo, y siendo la unidad el cuadrado formado por el semieje conjugado, esto es, el rectángulo bajo la mitad de los lados recto y transverso, y significando $\pm$ para la hipérbola $+$, y para el círculo y la elipse $-$. De esta manera, tomando como 1 el cuadrado del diámetro, el círculo sería $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+$etc. Cuando nuestro autor mostró a Huygens este descubrimiento con su demostración, él lo aplaudió como algo maravilloso y, al devolvérselo con una carta adjunta, afirmó que tal invento habría de ser memorable para los geómetras, y que con él nacería la esperanza de llegar alguna vez a la solución general, o mostrando su verdadero valor o demostrando su imposibilidad para las cantidades conocidas. En efecto, ni él, ni el propio inventor, ni nadie en París, de quien constara, había oído nunca de alguien que dijera con fundamento algo acerca de una serie racional infinita que mostrara la dimensión del círculo (fue después cuando se supo de las series trabajadas por Newton y por Gregory). [403] Ciertamente, Huygens nada sabía, como es patente por la carta adjunta [N. de Gerhardt: laguna en el manuscrito]; así que Huygens creyó que ésta era la primera vez que se demostraba que un círculo era exactamente igual a una serie de cantidades racionales. Lo mismo creyó su descubridor (confiando en el testimonio de propio Huygens, gran conocedor de todas estas materias). Y esta fue la razón por la que escribió aquellas dos cartas del año 1674 a Oldenburg, que sus adversarios ahora han editado, en las que anuncia como cosa nueva que él, y el primero de todos, había descubierto la dimensión del círculo expresada mediante una serie de números racionales, cosa que ya era conocida respecto de la hipérbola [GM I 51-56]. Porque si hubiera sido Oldenburg quien comunicara las series de Gregory y de Newton al autor cuando éste vivía en Londres el año anterior, habría sido una completa desvergüenza por su parte atreverse a escribírselas de nuevo a Oldenburg, o un completo olvido o incluso prevaricación por parte de éste no reprobar semejante disimulo. Los adversarios mismos presentan la respuesta de Oldenburg, en la que sólo indica ("no quiero que ignores", dice) que también a Gregory y a Newton les eran conocidas series parecidas, las cuales comunicó él a nuestro autor en el mes de abril del siguiente año (que ahora los adversarios dan a conocer) [GM I 60-66]. Puede así comprenderse qué ciegos están de envidia y corroídos de maldad quienes se atreven a inventar ahora que Oldenburg le había dado a conocer todo esto el año anterior; aunque la verdad es que algo de ceguera contiene su maldad, pues no han visto que editaban precisamente lo que destruía sus patrañas, cuando podían haber suprimido, o en todo o en parte, estas mismas cartas de Oldenburg como han hecho con otras. Por lo demás, el autor comenzó desde entonces a cartearse con Oldenburg acerca de cuestiones geométricas, en la medida en que iba descubriendo algo digno de comunicación en estudios de los que antes era un aprendiz. Las anteriores están fechadas en París los días 30 de marzo, 26 de abril, 24 de mayo, 8 de junio del año 1673, las cuales dicen ellos que se conservan, pero suprimen, junto con las respuestas de Oldenburg, las que trataban de otras cuestiones y no añadían nada que hiciera más creíbles aquellas comunicaciones ficticias de Oldenburg. Cuando nuestro autor oyó que Newton y Gregory habían llegado a las series mediante extracciones de raíces, reconoció que aquello era nuevo para él y al principio lo entendía poco; lo confesó honradamente e incluso a veces pidió explicaciones, sobre todo cuando se buscaban series recíprocas, para las que de una serie infinita había que extraer la raíz mediante otra serie infinita. Todo ello pone de manifiesto que es falso lo que se inventan los adversarios, que Oldenburg le comunicara a él los escritos newtonianos, [404] pues en tal caso no habría necesitado pedir aclaraciones. Pero después, cuando empezó a vislumbrar el cálculo diferencial, ideó un nuevo arte muchísimo más universal de descubrir series infinitas sin extracciones, y acomodado a cantidades tanto comunes como transcendentes, dando la serie buscada como ya descubierta. Usó este método para redactar su opúsculo sobre la Cuadratura Aritmética, donde incorporó también descubrimientos ajenos sobre series para calcular el arco desde el seno o desde el seno del complemento, y a la inversa; también con el mismo nuevo método, dado el arco encontrar el seno o el seno del complemento. Y esta es la razón por la que en adelante ya no necesitó de métodos ajenos. Finalmente publicó en las *Acta Eruditorum* esta su nueva manera de extraer series [GM V 118ss]. Pero, cuando estaba a punto de editar en París aquel opúsculo de la Cuadratura Aritmética, fue llamado a Alemania y, una vez perfeccionado el arte del nuevo cálculo, se ocupó menos de todo lo anterior.

Así que habrá que exponer ahora cómo nuestro autor alcanzó poco a poco a definir el nuevo género de notación, que llamó cálculo diferencial. Ya en el a. D. 1672, disertando con Huygens sobre las propiedades de los números, éste le había propuesto el siguiente problema: encontrar la suma de aquella serie decreciente de fracciones cuyos numeradores sean unidades y los denominadores sean los números triangulares, suma, decía él, que había encontrado en sus conversaciones con Hudde sobre medidas aleatorias. Nuestro autor descubrió que la suma era 2, lo que coincidía con la propuesta de Huygens. Del mismo modo encontró sumas de series también numéricas siendo los denominadores cualesquiera números combinatorios, lo que comunicó a Oldenburg en febrero de 1673, y que los adversarios han editado [GM I 27-31]. Y al conocer después el triángulo aritmético de Pascal, elaboró, siguiendo su ejemplo, el triángulo armónico:

Triángulo aritmético,
donde la serie fundamental
es de progresión aritmética, 1,2,3,4,5,6,7

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&2&&1&&&&&\\
&&&&1&&3&&3&&1&&&&\\
&&&1&&4&&6&&4&&1&&&\\
&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&\\
&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&\\
1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1
\end{array}$$

Triángulo armónico,
Donde la serie fundamental
es de progresión armónica $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7}$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&\frac{1}{1}&&&&&&\\
&&&&&\frac{1}{2}&&\frac{1}{2}&&&&&\\
&&&&\frac{1}{3}&&\frac{1}{6}&&\frac{1}{3}&&&&\\
&&&\frac{1}{4}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{4}&&&\\
&&\frac{1}{5}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{5}&&\\
&\frac{1}{6}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{6}&\\
\frac{1}{7}&&\frac{1}{42}&&\frac{1}{105}&&\frac{1}{140}&&\frac{1}{105}&&\frac{1}{42}&&\frac{1}{7}
\end{array}$$

[405] en el cual, si los denominadores de cualquier serie oblicua descendente hasta el infinito, y así mismo los de cualquier serie paralela finita, se dividen por el denominador del término correspondiente en la serie primera, se producen los mismos números combinatorios que se tienen en el triángulo aritmético. A ambos triángulos les es común que las series oblicuas son mutuamente sumatrices o diferenciales. En el triángulo aritmético, una serie dada es sumatriz de la inmediata precedente, y es diferencial de la inmediata siguiente; en el triángulo armónico, por el

contrario, una serie dada es sumatriz de la inmediata siguiente, y es diferencial de la inmediata precedente. De todo ello se sigue:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{etc.}=\frac{1}{0}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\text{etc.}=\frac{2}{1}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}+\text{etc.}=\frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}+\frac{1}{210}+\text{etc.}=\frac{4}{3}$$

y así sucesivamente.

Todo esto lo tenía ya conseguido nuestro autor cuando todavía no era experto en el análisis cartesiano; pero una vez que lo conoció bien, consideró que un término de una serie podía ser designado con una notación general, mediante la que referirse a una serie simple. Así, por ejemplo, si a un término de la serie natural $0,1,2,3,4,5,6,7, etc$ lo llamamos x, cualquier término de la serie de los cuadrados será xx, de los cubos será x^3, etc; cualquier término triangular, como $0,1,3,6,10,\text{etc.}$ será $\frac{x.x+1}{1.2}$, esto es, $\frac{xx+x}{2}$, cualquier término piramidal como $0,1,4,10,20,\text{etc.}$ será $\frac{x.x+1.x+2}{1.2.3}$, esto es, $\frac{x^3+3xx+2x}{6}$, y así sucesivamente. De esta manera, mediante el cálculo general de la serie dada se puede averiguar la serie diferencial y a veces también la sumatoria, cuando quepa dentro de los números. [406] Por ejemplo, si el cuadrado es xx, su inmediato mayor será $xx+2x+1$, y la diferencia entre ellos será $2x+1$, esto es, la serie de los números impares es la serie diferencial de los cuadrados. En efecto, si x es $0,1,2,3,4,\text{etc.}$ entonces $2x+1$ será $1,3,5,7,9.$ Así mismo, la diferencia entre x^3 y $x^3+3xx+3x+1$ será $3xx+3x+1$, que es el término para la serie diferencial de los cubos. Por consiguiente, si el valor de un término de la serie propuesta puede expresarse por la variable x de forma que tal variable no se contenga ni en los denominadores ni en el exponente, nuestro autor veía que siempre podía calcularse la sumatriz de la serie dada. Por ejemplo, si buscamos la sumatriz de los cuadrados cuando conste que no puede elevarse más allá del grado del cubo, nuestro autor suponía que su término fuera = $lx^3+mxx+nx=z$, y buscar $dz=xx$; tendremos así que $dz=ld(x^3)+md(xx)+n$ (suponiendo $dx=1$); pero $d(xx)=2x+1$, y $d(x^3)=3xx+3x+1$ (por lo ya descubierto); por lo tanto, tendremos

$$\begin{aligned} dz = 3lxx + 3lx &+ 1 \\ + 2mx &+ m \cong xx \\ &+ n \end{aligned}$$

por lo tanto, será $l=\frac{1}{3}, m=-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+n=0$, esto es, $n=\frac{1}{6}$; así, el término de la serie sumatriz de los cuadrados será $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}xx+\frac{1}{6}x$, o sea, $2x^3-3xx+x,:6$. Por ejemplo, si alguien quisiera saber la suma nueve o diez de los primeros cuadrados desde el 1 al 81 o desde el 1 hasta el 100, deberá tomar como x el número 10 u 11 inmediatamente mayor que la raíz del último cuadrado, y entonces $2x^3-3xx+x,:6$ será $2000-300+10,:6=285$, o también $2662-363+11,:6=385$. Tampoco es mucho más difícil sumar cien o mil cuadrados de esta forma abreviada. El mismo método sirve para cualesquiera potencias de números aritméticos o fórmulas compuestas por tales potencias, de manera que siempre pueden sumarse por abreviación cualesquiera términos de tal serie. No obstante, nuestro autor veía fácilmente que no siempre podemos proceder así; por ejemplo cuando la variable x forma parte del denominador y queremos calcular la serie numérica sumatriz. Prosiguió, sin embargo, su trabajo dentro de este mismo análisis y descubrió y dio a conocer en las *Acta Eruditorum* de Leipzig que, en general, siempre se puede encontrar una serie sumatriz o reducir el problema a un sumando de términos fraccionarios simples, tales como

$\frac{1}{x},\frac{1}{xx},\frac{1}{x^3}$ etc. el cual, al estar compuesto de un número finito de términos, puede ciertamente sumarse, aunque todavía no de forma abreviada; pero, si se trata de un número infinito de términos, entonces términos tales como $\frac{1}{x}$ no pueden en absoluto sumarse puesto que toda la serie de tal número infinito de términos [407] es ella misma una cantidad infinita, y los términos en número infinito como $\frac{1}{xx}$ o $\frac{1}{x^3}$, etc. aunque constituyen una cantidad finita, sin embargo, hasta ahora no han podido ser sumados pues han de suponerse previamente sus cuadraturas. Así que, ya en el segundo mes de las *Acta Eruditorum* de Leipzig del a. D. 1682 [*De vera proportione*, GM V 118ss] observó que, si tomamos los números $1.3, 3.5, 5.7, 7.9, 9.11$ etc., esto es, $3, 15, 35, 63, 99$ etc. y con ellos formamos la serie de fracciones

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}\text{ etc}$$

esta serie descendente in infinitum no suma sino $\frac{1}{2}$; pero si tomamos los números salteados $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ etc. observamos que expresan la magnitud del semicírculo cuyo cuadrado del diámetro es 1. Esto es, si $x=1$ ó 2 ó 3, etc. el término de la serie $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$ etc es $\frac{1}{4xx+8x+3}$, y se busca el término de la serie sumatriz. Tratemos de ver si mediante una razón simplicísima puede tener la forma $\frac{e}{bx+c}$; será

$$\frac{e}{bx+c}-\frac{e}{bx+b+c}=\frac{eb}{bbxx+bbx+bc+2bcx+cc}\cong\frac{1}{4xx+8x+3},$$

e identificando las dos fórmulas, tenemos $b=2, eb=1$; por lo tanto, $e=\frac{1}{2}, bb+2bc=8$, esto es, $4+4c=8$ ó $c=1$, y finalmente $bc+cc=3$, que verifica la ecuación. Luego el término de la serie sumatoria es $\frac{1:2}{2x+1}$, esto es, $\frac{1}{4x+2}$, siendo $4x+2$ el duplo de los impares. Finalmente, vio también una manera de emplear el cálculo diferencial para series numéricas cuando la variable está contenida en el exponente, como ocurre en la progresión geométrica donde, puesta la raíz b, el término es b^x, siendo x los números naturales. Así, el término de la serie diferencial será $b^{x+1}-b^x=b^x(b-1)$, donde es manifiesto que la serie diferencial de una geométrica dada es también una geométrica proporcional a la dada, con lo que tenemos la suma de una progresión geométrica.

Nuestro autor observó también fácilmente que el cálculo diferencial en las figuras era admirablemente más fácil que el que se utiliza en los números, puesto que en las figuras las diferencias no se pueden comparar con sus propios diferentes: en efecto, cada vez que se unen por adición o sustracción los que son entre sí incomparables, los menores se desvanecen ante los mayores, de manera que con ello las irracionales se pueden diferenciar con no menos facilidad que las sordas mediante los logaritmos de las cantidades mismas exponenciales. Observaba, además, que las líneas infinitamente pequeñas que aparecen [408] en las figuras no son otra cosa que diferencias momentáneas de las líneas variables. Y de la misma manera que las cantidades consideradas hasta ahora simplemente por los analistas habían tenido sus funciones, esto es, sus potencias y raíces, así también las cantidades, en tanto que variables, tendrían igualmente nuevas funciones, esto es, sus diferencias. Y así como hasta ahora habíamos tenido x, xx, x^3, etc

y, yy, y^3 ,etc, también podríamos utilizar dx, ddx, d^3x , etc, dy, ddy, d^3y ,etc. De este modo, todas aquellas curvas que Descartes expulsó de la Geometría como mecánicas podrán ser expresadas como ecuaciones locales y ser tratadas mediante cálculo, liberando así nuestro espíritu de aquella constante atención a las figuras. Así, en la aplicación del cálculo diferencial a la Geometría, las diferencias de primer grado no son más que el descubrimiento de las tangentes; las diferencias de segundo grado son el descubrimiento de las osculantes (cuya utilización también descubrió nuestro autor), y así puede procederse sucesivamente. Mas no sólo sirve todo esto para el tratamiento de tangentes y cuadraturas, sino para toda clase de problemas y teoremas, donde las diferencias se mezclan de diversas formas con los que el ingeniosísimo Bernoulli llamaba términos integrantes, como suele ocurrir en los problemas físico-mecánicos. Generalizando, nuestro autor estableció que, si una serie de números o una figura de líneas tiene una propiedad que depende de dos o de tres o de cuatro etc. términos próximos, puede expresarse mediante una ecuación en la que se incluyan las diferencias del primero o del segundo o del tercer etc. grado. Todavía más, descubrió teoremas generales para cualquier grado de diferencias, de la misma manera que ya teníamos teoremas para cualquier grado, y encontró una admirable analogía entre potencias y diferencias, que publicó en *Miscelanea Berolinensia* [LAMARRA, II 724]; cosa que, si su rival hubiera conocido, no habría empleado aquellos puntos que él usaba para designar los grados de las diferencias, que no sirven para expresar el grado general de la diferencia, sino que habría mantenido la notación d , impuesta por nuestro autor u otra semejante, pues d^e puede expresar el grado general de la diferencia. En conclusión, podía expresarse ya mediante cálculo todo lo que hasta entonces se presentaba con figuras. En efecto, siendo ahora $\sqrt{(dxdx + dydy)}$ el elemento de la curva, ydx el elemento del área, y $\int ydx$ y $\int xdy$ mutuamente complementarias, se obtiene de inmediato que $d(xy) = xdy + ydx$; a su vez, $xy = \int xdy + \int ydx$, aunque varíen los signos; y de la igualdad $xyz = \int xydz + \int xzdy + \int yzdx$ se muestran los tres sólidos que son mutuamente complemento. Tampoco necesitamos ya conocer aquellos teoremas que más atrás dedujimos del triángulo característico; por ejemplo, basta explicar el momento de la curva desde el eje mediante $x\int \sqrt{dxdx + dydy}$. Y lo que Gregorio de S. Vicente tiene sobre aplicaciones, él mismo o Pascal [409] sobre cuñas o secciones, todo ello se produce de forma inmediata en este cálculo. Así que todo aquello que con aplauso había visto inventado por otros y con placer descubierto por sí mismo, ahora ya en gran parte dejó de ocuparle, puesto que todo se contenía en el nuevo cálculo. Por ejemplo, el momento de la figura

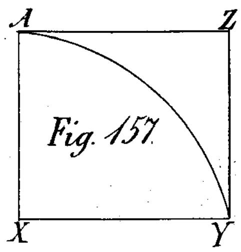


Fig. 157

AXYA (fig. 157) desde el eje *AX* es $\frac{1}{2}\int yydx$; el momento de la figura desde la tangente del vértice es $\int xydx$; el momento del trilíneo complementario *AZYA* desde la tangente del vértice es $\frac{1}{2}\int xxdy$; pero estos dos últimos momentos tomados conjuntamente componen el momento del rectángulo circunscrito *AXYZ* desde la tangente del vértice y, por lo tanto, son mutuamente complemento, que es $\frac{1}{2}xxy$. Pero esto último, sin la consideración de la figura, lo muestra también el cálculo, pues $\frac{1}{2}d(xxy) = xydx + \frac{1}{2}xxdy$, de manera que en delante de todos aquellos brillantes teoremas de tan excelentes varones no tengamos más necesidad para la Geometría arquimédea, que de aquéllos otros varios que se contienen en el libro 2 de Euclides y en otros lugares para la Geometría común. A veces ocurre bellamente que el cálculo de las ecuaciones transcendentes conduce a las ordinarias, cosa que a Huygens le producía gran satisfacción. Como, por ejemplo, si hallamos que $2\int\frac{dy}{y}=3\int\frac{dx}{x}$, inmediatamente tenemos $yy=x^3$, por la naturaleza de los logaritmos combinada con el cálculo diferencial, pues ella misma deriva también del mismo cálculo; en efecto, si $x^m=y$, tendremos $mx^{m-1}dx=dy$, y dividiendo ambos miembros por una misma cantidad, será $m\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y}$; y de nuevo por la igualdad $m\log x=\log y$, tendremos $\log x:\log y=\int\frac{dx}{x}:\int\frac{dy}{y}$. De donde se sigue que también el cálculo exponencial se hace tratable: sea $y^x=z$; tendremos $x\log y=\log z$; luego $dx\log y+xdy:y=dz:z$. Así liberamos a los exponentes de la variable, o a la inversa podemos llevar la variable al exponente, si lo necesitamos.

Para concluir, se ha convertido en juego y diversión lo que en otro tiempo era admiración. De todo este cálculo ni palabra ni vestigio puede encontrarse en los escritos del rival anteriores a la edición de las reglas del cálculo por nuestro autor, ni cosa alguna que Huygens o Barrow no habrían aportado del mismo modo que él, si se hubieran ocupado de los mismos problemas. Cuánta sea la ayuda que este cálculo ofrece lo reconoció honestamente el propio Huygens, cosa que los adversarios ocultan cuanto pueden ocupándose de otras cosas, no abordando a lo largo de todo su escrito lo que es propio de este cálculo y limitándose sólo a las series infinitas, cuyo método ciertamente fue el rival quien antes que otros promovió, lo que nadie niega. No obstante, todo aquello que dijo ocultándolo bajo anagramas, y [410] que después desveló, habla de fluxiones y de fluentes, esto es, de cantidades finitas y de sus elementos infinitamente pequeños, pero sobre el modo de derivar una cosa de la otra no ofrece la más mínima ayuda. Y cuando se ocupaba de las razones crecientes o evanescentes, se separó completamente del cálculo diferencial para dedicarse al método de exhaustiones, que es muy distinto (aunque también tiene su utilidad) y no trabaja las cantidades infinitamente pequeñas sino las ordinarias, aunque termine en aquéllas.

Así pues, como los adversarios ni en el *Commercium Epistolicum* que han publicado ni de cualquier otra forma han presentado el más mínimo indicio de que el rival utilizara este cálculo antes de lo editado por nuestro autor, todo lo alegado por ellos puede despreciarse como extravagante. Han utilizado las artes de los charlatanes a fin de desviar a los jueces de la cuestión tratada y conducirlos a otra distinta, a las series infinitas. Pero tampoco en éstas han podido aportar nada que dañara la honestidad de nuestro autor: pues él mismo ha declarado lealmente en favor de quien en ellas le ha precedido, aunque también aquí él ha llegado a algo más excelente y más universal.