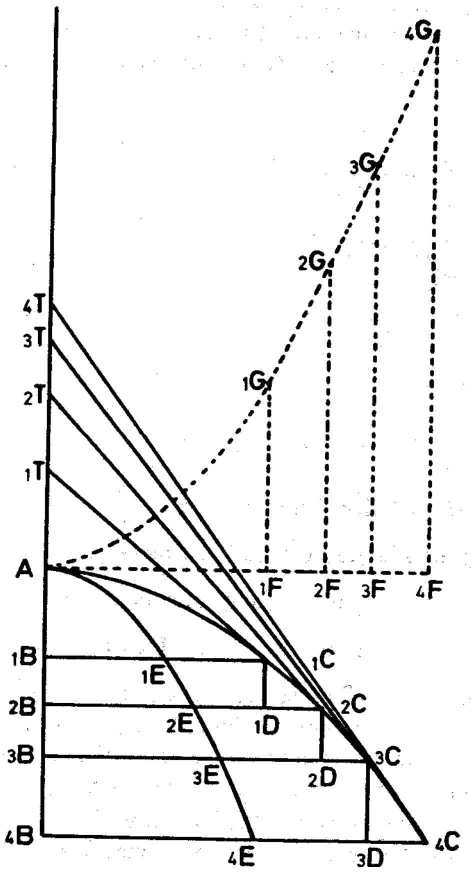
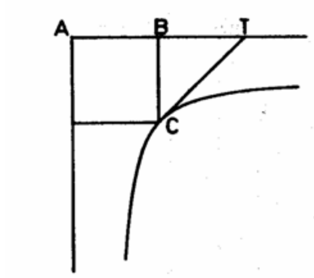
ELEMENTOS DE UN NUEVO CÁLCULO
(ed. crítica de H.-J. Hess, en ST.LB. Sonderheft 14, 1986, p. 97-102)

Elementos de un nuevo cálculo para diferencias y sumas, para tangentes y cuadraturas, para máximos y mínimos, para dimensiones de líneas, tanto de superficies como de sólidos, y para otras que trascienden el cálculo común.



[98] Sea la línea CC, cuyo eje es AB, las ordenadas normales al eje serán BC, que llamaremos y, las abscisas desde el eje AB, que llamaremos x. Ahora, CD son las diferencias de las abscisas, que llamaremos dx, que son ${}_1C_1D,\ \ {}_2C_2D,\ \ {}_3C_3D,\ etc.$ A las rectas ${}_1D_2C,\ \ {}_2D_3C,\ \ {}_3D_4C$ (diferencias de las ordenadas BD) las llamaremos dy. Si suponemos que estas dx y dy son infinitamente pequeñas, esto es, cuando se entiende que los puntos de la curva tienen entre sí una distancia menor que cualquiera dada, o sea, si estas ${}_1D_2C,\ {}_2D_3C,$ etc. se consideran como incrementos momentáneos de la línea BC que crece continuamente al descender por AB, entonces es claro que la recta que une dos de esos puntos, por ejemplo ${}_2C_1C$ (que es el elemento de la curva, esto es, el lado del polígono infinitángulo que tenemos para la curva), extendida hasta llegar al eje en ${}_1T,$ será la tangente a la curva y tendremos que ${}_1T_1B$ (intervalo entre la ordenada y la tangente tomado en el eje) será a la ordenada ${}_1B_1C$ como ${}_1C_1D$ a ${}_1D_2C$; y si a ${}_1T_1B$ ó ${}_2T_2B$ etc lo llamamos generalizando t, tendremos que $t : y :: dx : dy$. De esta manera, hallar las diferencias de las series es hallar las tangentes.

Por ejemplo, si se busca la tangente a la hipérbola, al ser $y = \frac{aa}{x}$ (siendo x [fig.2]



ó AB la abscisa desde la asíntota, y a el lado de la potencia o rectángulo ABC), tendremos $dy = -\frac{aa}{xx}dx$, como se pondrá de manifiesto inmediatamente cuando mostremos el modo de calcular; por lo tanto, $dx : dy$ ó también $t : y :: -xx : aa :: -x : \frac{aa}{x} :: -x : y$; por lo tanto, $t = -x$; esto es, en la hipérbola [fig. 2] será $BT = AB$, pero debido al signo -, x habrá de tomarse no hacia A, sino hacia la parte contraria.

Ahora bien, las diferencias son recíprocas a las sumas, y así, las ordenadas son sumas de sus diferencias. De esta manera, ${}_4B_4C$ es suma de todas las diferencias, y así mismo ${}_3D_4C,$ ${}_2D_3C,$ etc. hasta A, aunque fueran en número infinitas, lo que designo así: $\int dy = y$. Al área de la figura la designo por la suma de los rectángulos desde las ordenadas hasta las diferencias de las abscisas como, por ejemplo, ${}_1B_1D + {}_2B_2D + {}_3B_3D,$ etc. pues los exiguos triángulos ${}_1C_1D_2C,$ ${}_2C_2D_3C,$ etc, al ser infinitamente pequeños respecto de dichos triángulos, pueden omitirse impunemente. [99] De esta manera, al área de la figura la designo en mi cálculo así: $\int ydx$, esto es, la suma de los rectángulos de cada y multiplicado por su correspondiente dx, donde, si los dx se suponen iguales entre sí, tenemos el método de los indivisíbiles de Cavalieri. Pero nosotros, elevándonos más alto, hallaremos el área de la figura si hallamos su figura sumatriz o cuadratriz, cuyas ordenadas sean a las ordenadas de la figura dada como las sumas a las diferencias. Por ejemplo, sea [fig. 1] EE la curva de la figura que vamos a cuadrar, EB sus ordenadas, a las que llamaremos e y que sean proporcionales a las diferencias de las ordenadas BC, esto es, proporcionales a dy, a saber, sea ${}_1B_1E : {}_2B_2E :: {}_1D_2C : {}_2D_3C$, y así sucesivamente, o como A_1B a ${}_1B_1C$, o como ${}_1C_1D$ a ${}_1D_2C$, o como dx a dy, siendo así constante o siempre permanente la recta a respecto de ${}_1B_1E$ ó e; tendremos así que $dx : dy :: a : e$, esto es, $edx = ady$. Por lo tanto, $\int edx = \int ady$. Pero edx, o sea, e correspondiente a los dx, es como el rectángulo ${}_3B_4E$ que se produce desde ${}_3B_3E$ a ${}_3B_4B$; por lo tanto, $\int edx$ será la suma de tales rectángulos ${}_3B_4E + {}_2B_3E + {}_1B_2E$, etc, la cual suma es el área de la figura A_4B_4EA, dados los dx ó la e de las ordenadas, o sea BE, y los intervalos infinitamente pequeños. Ahora bien, ady es un rectángulo desde dy como ${}_3D_4C$ por la constante a, y la suma de estos rectángulos, o sea, $\int ady$, esto es, ${}_3D_4C$ por $a + {}_2D_3C$ por $a + {}_1D_2C$ por a etc es lo mismo que ${}_3D_4C + {}_2D_3C + {}_1D_2C$ etc por a, esto es, lo mismo que ${}_4B_4C$ por a. Por lo tanto, $\int ady = a\int dy = ay$. Tenemos, pues, que $\int edx$ es igual a ay, esto es, el área A_4B_4EA será igual al rectángulo bajo la ordenada ${}_4B_4C$ y la constante a, y generalizando, el área $ABEA$ será igual a BC por la constante a. Así pues, para encontrar las cuadraturas, dada la línea EE, sólo es necesario encontrar otra línea CC sumatriz, y esto siempre se puede conseguir con el cálculo; si tal línea puede obtenerse con la geometría común o se trata de una línea transcendente que no puede expresarse con el cálculo algebraico, lo trataremos en otro lugar. De todo lo dicho pueden deducirse, con el solo cálculo y sin apenas uso de la imaginación, infinitos y bellos teoremas, algunos de los cuales fueron ya descubiertos por ingleses y holandeses, y otros aún están por inventar. Al *triángulo* formado en la línea, tal como ${}_1C_1D_2C$, lo llamo *característico* de la línea, pues con su ayuda pueden descubrirse en torno a ella teoremas admirables, como su dimensión, el área de su figura, la superficie, los sólidos engendrados por rotación, los centros de gravedad, etc, ya que ${}_1C_2C = \sqrt{dx.dx + dy.dy}$. En efecto, de forma inmediata se obtiene el modo de averiguar la dimensión de la curva mediante alguna cuadratura, por ejemplo en la parábola. Si $y = \frac{xx}{2a}$, será $dy = \frac{xdx}{a}$. De donde ${}_1C_2C$ será $\frac{dx}{a}\sqrt{aa+xx}$; por lo tanto, ${}_1C_2C$ será a dx como la ordenada de la hipérbola $\sqrt{aa+xx}$ a la constante a, esto es, $\frac{1}{2}\int \overline{dx\sqrt{aa+xx}}$; la recta igual a la curva de la parábola depende de la cuadratura de la hipérbola, tal como ya ha sido descubierto por otros. De esta manera, se expresan mediante cálculo los hermosísimos descubrimientos de Huygens, de Wallis, Heurat y Neill.

[100] Más atrás he dicho que $t : y :: dx : dy$. Por lo tanto, $tdy = ydx$. Por lo tanto, $\int tdy = \int ydx$. Esta ecuación enunciada en las líneas nos da el elegante teorema de Gregory, a saber, sea BAF el ángulo recto, sean AF iguales a BC, FG paralelas a AB e iguales a BT, esto es, ${}_1F_1G$ iguales a ${}_1B_1T$, tendremos así $\int tdy$ o suma de los rectángulos desde t, por ejemplo, ${}_4F_4G$ (ó ${}_4B_4T$) por dy ó ${}_3F_4F$ (ó ${}_3D_4C$), esto es, el rectángulo ${}_4F_3G + {}_3F_2G + {}_2F_1G$, etc, o sea, el *área de la figura* A_4F_4GA será igual a $\int ydx$ o figura A_4B_4CA y, generalizando,

$AFGA$ será igual a $ABCA$. A su vez, mediante el cálculo, se deducen fácilmente otras cosas que se evidencian en la contemplación de la figura, por ejemplo, que en el trilíneo $ABCA$ la figura $ABCA$ junto con la figura complementaria $AFCA$ se igualan con el rectángulo $ABCF$, que el cálculo muestra de inmediato así: $\int ydx + \int xdy = xy$. Si se quiere calcular el sólido formado por rotación en torno al eje, simplemente se puede buscar $\int \overline{yydx}$; para el sólido en torno a la base: $\int \overline{xxdy}$; para el momento desde el vértice: $\int \overline{yxdx}$, que sirven para descubrir los centros de gravedad de las figuras y expresan la curva de Gregorio de S. Vicente y todo lo que más tarde descubrieron Pascal, Wallis, Lalovera y otros. Pues si se buscan los centros de las líneas y las superficies engendradas por sus rotaciones, por ejemplo, la superficie de la línea AC rotando en torno a AB, solamente debe calcularse $\int \overline{y\sqrt{dxdx+dydy}}$ o suma de todos los DC aplicados al eje en los puntos correspondientes de B; así ${}_2D_2C$ se aplicará como normal a ${}_2B$ en el eje AB, con lo que se produce la figura cuya área es esta misma suma. De esta forma, el problema se reduce inmediatamente a la cuadratura de una figura plana, sustituyendo y y dy por el valor según las ordenadas y las tangentes de la curva. Así, para la parábola, sea $y = \sqrt{2ax}$; entonces $dy = \frac{adx}{y}$, como en seguida se mostrará. Y tendremos

$\int \overline{y\sqrt{dxdx + \frac{aa}{yy}dxdx}}$ o $\int \overline{dx\sqrt{yy+aa}}$ o $\int \overline{dx\sqrt{2ax+aa}}$, que depende de la cuadratura de la parábola (pues ésta es el lugar de todos los $\sqrt{2ax+aa}$ ó DC respecto de la parábola, suponiendo que AC es la parábola, AB su eje, aunque en tal caso debería cambiarse la figura y transformar en la curva la concavidad respecto del eje), pero, al tenerla ésta ya por la geometría común, se tendrá también el círculo igual a la superficie de la conoide parabólica, que sería prolijo deducir ahora. Todo esto que parece grande, no son sin embargo más que corolarios muy fáciles de este cálculo. Otras muchas cosas mayores se siguen de aquí y no sería fácil encontrar problemas, tanto en la geometría pura como en los pertenecientes a la mecánica aplicada, que escaparan completamente a su potencia.

Expongamos ya los elementos de este cálculo.

Fundamento del cálculo. Las diferencias y las sumas son mutuamente recíprocas, esto es, la suma de las diferencias de una serie es el término de la serie, y la diferencia de las sumas de la serie es el mismo término de la serie; lo primero lo enuncio así: $\int dx = x$; lo segundo: $d\int x = x$.

Sea la serie de la diferencia		1	2	3	4	5		dx
la serie misma	0	1	3	6	10	15		x
la serie de la suma	0	1	4	10	20	35		$\int x$

[101] Así, los términos de la serie son las sumas de las diferencias, esto es, $x = \int dx$; por ejemplo, 3=1+2; 6=1+2+3, etc. Por el contrario, las diferencias de las sumas de la serie son los términos mismos de la serie, esto es, $d\int x = x$; por ejemplo, 3 es la diferencia entre 1 y 4, y 6 lo es entre 4 y 10. $da = 0$.

Adición y sustracción. La diferencia o la suma de una serie cuyo término está compuesto por la adición o por la sustracción de los términos de otras series está compuesto igualmente por las diferencias o por las sumas de estas series. Así, $x + y - v = \int \overline{dx + dy - dv}$, o a la inversa, $\int \overline{x + y - v} = \int x + \int y - \int v$. La cosa es evidente: si se presentan tres series y las sumas o diferencias de cada una, del mismo modo responderá cada una a sus correspondientes.

Multiplicación simple: $d\overline{xy} = xdx + ydy$, o también $xy = \int \overline{xdx} + \int \overline{ydy}$. Es lo mismo que más atrás hemos dicho, a saber, que la figura junto con su complemento es igual al rectángulo circunscrito. Se demuestra así mediante cálculo: $d\overline{xy}$ es lo mismo que la diferencia de dos xy inmediatamente próximos, de los que uno es xy y el otro es $x+dx$ por $y+dy$ con lo que tendremos $d\overline{xy} = \overline{x+dx}.\overline{y+dy} - xy$ ó también $+xdy + ydx + dxdy$, y omitida la cantidad $dxdy$ por ser infinitamente pequeña respecto de las demás puesto que tanto dx como dy son infinitamente pequeñas (esto es, las líneas se entienden continuamente crecientes o decrecientes por sus mínimos a través del término de la serie), tendremos $xdy + ydx$, advirtiendo que los signos varían según que x e y crezcan simultáneamente o que una sea creciente y la otra decreciente.

División simple. $d\frac{y}{x} = \frac{xdy - ydx}{xx}$, pues $d\frac{y}{x} = \frac{y+dy}{x+dx} - \frac{y}{x}$, o sea, $\frac{xdy - ydx}{xx + xdx}$, donde en lugar de $xx + xdx$ escribimos sólo xx pues xdx puede omitirse como infinitamente pequeña respecto de xx, con lo que tendremos $\frac{xdy - ydx}{xx}$; si y fuera igual a aa, entonces dy sería igual a 0, de donde tendríamos $-\frac{aadx}{xx}$, valor éste al que hace poco hemos tomado como la tangente de la hipérbola.

De todo ello fácilmente podrá cualquiera deducir la *multiplicación o la división compuesta*. Así, $d\overline{xyv}$ será $xydv + xvdy + yvdx$, con lo que $d\frac{y}{vz}$ [léase x donde pone z, N. del ed.] será $\frac{xvdy - yvdz - yzdv}{vvzz}$, lo que se demuestra por lo anterior, pues $d\frac{y}{x} = \frac{xdy - ydx}{xx}$, donde poniendo zv en lugar de x, y poniendo $xdv + zdx$ en lugar de dx ó dzv (por lo anterior) obtendremos lo que dijimos.

Siguen las *potencias*. $dx^2 = 2xdx$; $dx^3 = 3xxdx$. Pues, poniendo $y = x$ y $v = x$, en lugar de $d\overline{xx}$ se podrá escribir $d\overline{xy}$, esto es (por lo anterior) $xdy + ydx$, o también (si $x = y$ y, por consiguiente, $dx = dy$) $2xdx$. De forma semejante, en lugar de dx^3 se escribirá $d\overline{xyv}$, esto es (por lo anterior) $xydv + xvdy + yvdx$, o también [102] (poniendo x en lugar de y y v, y poniendo dx en lugar de dy y dv) tendremos $3xxdx$. Q.E.D. Así mismo, de forma general, dx^e será igual a $ex^{e-1}dx$, lo que según lo dicho no será difícil demostrar. De aquí se sigue que $d\frac{1}{x^h} = -\frac{hdx}{x^{h+1}}$. Pues, si $\frac{1}{x^h} = x^e$, entonces $e = -h$, $x^{e-1} = \frac{1}{x^{h+1}}$, como es conocido por quien comprenda la naturaleza de los exponentes en una progresión geométrica. Todo esto vale también para las *fracciones.*

De la misma manera se procede para las irracionales o *raíces*. $d\sqrt[r]{x^h} = dx^{h:r}$ (por $h:r$ entiendo $\frac{h}{r}$) o también (suponiendo $e = \frac{h}{r}$) dx^e ó $ex^{e-1}dx$ (por lo anterior) o también (poniendo $h:r$ en lugar de e, y poniendo $\overline{h:r:r}$ en lugar de $e-1$) $\frac{h}{r}x^{\overline{h-r:r}}dx$, que por lo tanto será igual a $d\sqrt[r]{x^h}$. De ello, a su vez, tenemos $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1}$, y $\int \frac{1}{x^e} dx = -\frac{1}{\overline{e-1}x^{e-1}}$, y $\int \sqrt[r]{x^h} dx = \frac{r}{h+r} \sqrt[r]{x^{\overline{h+r}:r}}$.

Estos son los elementos del cálculo diferencial o sumatorio, mediante el cual pueden tratarse otras fórmulas muy compuestas, lo mismo para una cantidad fraccionaria o irracional que para cualquier otra, cuando en ella entra una indefinida, esto es x ó y u otra que exprese en general el término de alguna serie.