DOS CARTAS DE LEIBNIZ , UNA A GUIDO GRANDI Y OTRA A CHRISTIAN WOLFF SOBRE LA CIENCIA DEL INFINITO

CARTA DE LEIBNIZ A GUIDO GRANDI
(Viena, 6 de septiembre de 1713)
Carta VI. GM IV 217-220
(véase nota 654)

Habiendo valorado como es debido tus excelentes méritos en las cuestiones referentes a la Geometría y, sobre todo, a nuestro Análisis, me alegra poder ahora expresártelo [218] de manera más próxima, aunque sólo sea con mi aplauso a tu carrera y mi aliento a tus progresos más que con la esperanza de poder ayudarte demasiado a mi edad y con tantas ocupaciones. Estamos todavía en el primer estadio del Análisis más profundo y por ello tanto más necesitados del trabajo conjunto de varones excelentes. Vuestra Italia, fecunda en insignes ingenios, ha comenzado a disfrutar de la dulzura de esta doctrina, siendo tú su guía adelantado. Mi opinión, expuesta ya muchas veces, es que los infinitamente pequeños así como las magnitudes infinitas son sin duda ficciones, pero útiles para razonar de forma abreviada y, a la vez, segura; y que basta con tomarlas tan pequeñas como sea necesario para que el error sea menor que cualquiera dado, con lo que se muestra nulo. De esta afirmación tengo argumentos incuestionables, que ahora sería demasiado prolijo exponer. Concebimos los infinitamente pequeños no como *nadas* simple y absolutamente, sino como *nadas respectivas* (como tú bien señalas) [GM IV 216], esto es, que se desvanecen hacia nada, pero reteniendo el carácter de aquello que se desvanece; y, multiplicadas por una cantidad infinita también modificada, entendemos que producen una cantidad ordinaria. No es, por otra parte, inelegante que con ello ilustres tú la cuestión de la Creación, donde la potencia absoluta infinita produce algo desde la nada absoluta. Es verdad que en nuestro análisis concebimos una recta infinita modificada como, por ejemplo, $aa : dx$ que, multiplicada por dx, que tiende a nada o, lo que es lo mismo, que tiende al estado de anihilación de la recta x al ir decreciendo continuamente, produce el rectángulo ordinario aa. Pero nuestras magnitudes infinitas en número (esto es, mayores que cualquier número) nunca componen un todo infinito, de manera que la verdadera infinitud sólo compete a lo infinito en poder, que carece absolutamente de partes y, por ello, ni la eternidad ni la recta infinita son un todo uno, aunque las expresemos con un nombre unitario, mientras que las magnitudes extraordinarias de nuestro cálculo son ficciones. Sin embargo, no por ello tenemos que despreciarlas o rechazar la analogía con ellas, [que serviría] a la verdadera religión; y no negaría yo en absoluto que ello pudiera ser, puesto que en el cálculo es como si esas magnitudes fueran verdaderas, están dotadas de un *fundamentum in re* y de una cierta verdad ideal, como las raíces imaginarias, que Preset, analista francés, erróneamente consideraba contradictorias. Pues, de la misma manera que las raíces imaginarias son necesarias para establecer ecuaciones que contienen tanto casos posibles como imposibles, así mismo las magnitudes extraordinarias son necesarias para establecer reglas generales que incluyen lo mismo los términos medios que los extremos [219], por ejemplo, para incluir bajo la convergencia el paralelismo como extremo de dicha convergencia. La Naturaleza ha otorgado a las cosas *la ley inviolable de la continuidad*, que yo expuse hace tiempo en las primeras *Nouvelles de la République* editadas en Holanda, a fin de que el uso de dichas reglas tampoco falle nunca en la Física, aun cuando en ésta no nos conste por demostración rigurosa, sino por razones de conveniencia, de manera que habremos de decir que Dios las contempló. Y por lo tanto, puede aceptarse como algo no descaminado que el caso mismo de un infinito modificado, multiplicado por un infinitamente pequeño modificado, creciendo o decreciendo continuamente, llegue por fin a la combinación de un infinito absoluto con una nada absoluta, esto es, la Creación. Sin perjuicio para la filosofía, los filósofos escolásticos no ignoraron estas sutilezas y esta, por así decir, metafísica de la Geometría (que Caramuel llamaba Metageometría), y produjeron por su parte cosas excelentes y dignas de saberse e, incluso, más útiles que las que comúnmente se agitan en las Escuelas. Cuando yo era adolescente, Nieuland, prefecto militar holandés, geómetra él mismo y filósofo, en un opúsculo editado poco antes del año 1672 y prologado con una carta de Huygens, utilizó una analogía no muy distinta a la tuya para ilustrar la Creación, pero no tengo el libro a mano. No discrepo de esto, pero yo he puesto como fundamento lo que tú mismo has observado, a saber, que de la naturaleza del infinito se desprende que en la serie de la que ahora tratamos [GM IV 216 y a continuación carta a Wolff] se desvanecen las diferencias entre los pares y los impares y, en general, también cuando la serie es finita; y aunque termine de forma ambigua por + o por -, hay que decir que la medida es la misma en ambos casos, esto es, su valor es $\frac{1}{2}$. Reconozco que el método por el que mostré que $1-1+1-1etc$ al infinito es $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{1+1}$ no puede aplicarse a la suma de todas las series infinitas; pero en ésta era necesario, tanto más cuanto que la serie no era decreciente ni continuamente convergente hacia el intervalo de la suma menor que el dado, como ocurre en otras series. No obstante, ofrecía una dificultad especial y mis amigos doctos consideraban absolutamente inadmisible una división que desde $\frac{1}{1+1}$ diera 1-1+1-1 etc, hasta que vieron mi explicación. También en otras series, donde alternan + y -, podría establecerse algunas veces una medida semejante. Y por muchas razones sería de la mayor importancia tener un método mediante el que pudiera conseguirse reducir una serie decreciente que constara de miembros meramente afirmativos a una serie en la que alternaran miembros positivos y negativos.

[En los dos últimos párrafos de su carta Leibniz se ocupa de algunas polémicas de Grandi y de otras noticias, de las que aquí podemos prescindir.]

CARTA DE LEIBNIZ A CHRISTIAN WOLFF
1713
GM V 382-387
(véase nota 632)

[382] Me preguntas, excelente Señor, qué pienso yo acerca de la cuestión replanteada últimamente por Guido Grandi, a saber, si $1-1+1-1+1-1+etc$ al infinito sea $\frac{1}{2}$, y cómo podría evitarse el absurdo que tal enunciado parece mostrar. Pues, como parece repetirse infinitas veces $1-1=0$, no se ve cómo de verdaderas *nadas* infinitas veces repetidas pueda resultar $\frac{1}{2}$. Yo comprendo que el Sr. Grandi atribuya al infinito la fuerza para hacer algo desde la nada, y que de aquí de forma no descaminada trate de ilustrar la Creación de las cosas, que se producen de la nada por la omnipotencia divina. De todas maneras, la Creación no es una simple repetición de *nadas*, sino que contiene sobreañadida una realidad nueva y positiva. He oído que el excelente Marchetti, profesor de matemáticas en Pisa, también se ha opuesto a la afirmación grandiana, pero no he llegado a conocer sus razones. Sin embargo, como este problema contiene una jugosa disquisición y, sobre todo, como nos permite ilustrar la *Ciencia del Infinito* (no tratada hasta ahora con la dignidad que se merece), será conveniente elevarnos más alto y retrotraerlo a sus fuentes, lo que espero no desagradará al excelente Grandi, cuya provisional conclusión debemos confirmar, aunque también pensamos que algunos de sus razonamientos y conclusiones requieren precisión, a fin de que la ciencia no sufra menoscabo.

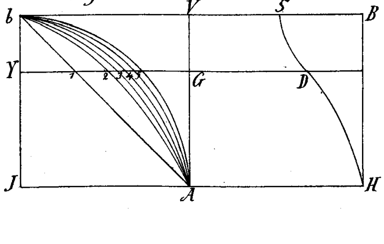
[383] Aquéllos que estudiaron la suma de los términos de una progresión geométrica (siguiendo el modelo del gran *Arquímedes* para la cuadratura de la parábola) y, sobre todo,

Gregorio de S. Vicente, afirmaron que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4 etc$ al infinito suponiendo x una magnitud inferior a la unidad. *Nicolás Mercator*, de Holstein, transformó la ecuación en $\frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - x^5 + etc$ al infinito, y mostró que (lo mismo que en la anterior), esto se seguía continuando la división y sustituyendo $+x$ por $-x$. Él mismo enseñó por primera vez en su edición de la *Logarithmotechnia* que la ecuación se aplicaba a la cuadratura por serie infinita y, de esta manera, nos dio su cuadratura aritmética de la hipérbola, que aplicó a los logaritmos. Animado con su ejemplo, yo mismo descubrí con gozo que no sólo la cuadratura del área, cuya ordenada es $\frac{1}{1-xx}$, servía para la cuadratura de la hipérbola, sino que lo mismo servía $\frac{1}{1+xx}$ para el Tetragonismo aritmético del círculo. Pues (poniendo xx en lugar de x), al ser $\frac{1}{1+xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + etc$ al infinito, se seguía de aquí que $\int \frac{dx}{1+xx}$ (suma que da la cuadratura del sector del círculo, tal como yo había descubierto con un método especial) sería $\int dx - \int xxdx + \int x^4 dx - \int x^6 dx, etc$ o también (conocida la cuadratura de la paraboloide) $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + etc.$ En cuyo caso, siendo $x = 1$, tendremos $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + etc$ al infinito. Esta serie infinita es a la unidad como el área del círculo al cuadrado del diámetro. Este descubrimiento, que ya había hecho yo mucho antes, lo publiqué el primer año de las *Actas* de la República Literaria de Leipzig [*De vera proportione circuli ad quadratum circunscriptum*…1682, GM V 118-122; LA. I 22ss]. Después, y en las mismas *Actas*, publiqué la formulación general que contiene en un único teorema la cuadratura de cualquier sección cónica que tiene centro [*Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum, quae centrum habent*…1692, GM V 128-132; LA. I 196-201]. El excelente Grandi ha tratado de demostrar todo esto a su modo mediante líneas, con criterio nada despreciable y adaptado a la comprensión de quienes están menos versados en el cálculo general, acomodando el problema más a la imaginación; es lo que yo mismo, cuando era joven, había hecho en París [384] (junto con otros muchos inventos afines), y había pensado entonces publicar y, sobre todo, dar a conocer el origen de estos descubrimientos, que quizás ni hoy mismo se conocen bien. Pero convocado después por otras ocupaciones, lo dejé pasar. Es, sin duda, mucho más fácil dar la demostración de los inventos que mostrar su origen, pero es éste el que incrementa el arte mismo de la invención.

Pero ahora, dejando aparte la cuadratura, volvamos a la serie y a los términos de la progresión geométrica (la única que en este momento necesitamos), que es la siguiente: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 + etc$ al infinito, o también $\frac{1}{1+xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 +$ etc. al infinito, y observemos lo que ocurre si $x = 1$. Y lo que ocurre, para nuestro asombro, es que $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + etc$ al infinito, que de alguna manera visualizamos en la figura empleada por el Sr. Grandi. Sea, pues (fig. 154) el cuadrado $bJAV$, trácese la recta diagonal

Ab ó $A_1 b$, trácense las infinitas parábolas o paraboloides $A_2 b, A_3 b, A_4 b, A_5 b, etc$, de manera que, designando por la unidad el lado del cuadrado, llamando x a la abscisa AG, y trazando la recta YG normal a AG, que corte a la diagonal y a las paraboloides en $1,2,3,4,5, etc$. Entonces, las ordenadas GY, $G1$, $G2$, $G3$, $G4$, $G5, etc$ serán respectivamente 1, x, xx, x^3, x^4, x^5, etc, y por lo tanto, las rectas

Fig. 154



GY, $G1$, $G2$, $G3$, $G4$, etc serán de progresión geométrica. Puesto esto así, trácese bV hasta B, de manera que $BV = bV$, y YG hasta D de manera que GD sea el agregado de estas ordenadas reunidas alternando por adición y sustracción, o sea, $GD = GY - G1 + G2 - G3 + etc$ o lo que es lo mismo (por lo anterior) $GD = \frac{1}{VA + AG} = \frac{1}{1 + AG}$, y completado el cuadrado $AVBH$, descríbase la curva SDH que pasa por cada uno de los puntos como D y llega hasta AH en H y hasta BV en S. En el caso en que $AG = VA = 1$, tendremos que $GD = \frac{1}{1 + xx} = \frac{1}{2} = VS$, esto es, $GD = \frac{1}{2} BV$, y por lo tanto, puesto que G cae sobre V y D sobre S, tendremos que $VS = \frac{1}{2} BV$ ó $\frac{1}{2} AV$. Y como todos los puntos $1,2,3,4,5, etc$ en este caso coinciden en uno y el mismo punto B, tendremos que $G1, G2, G3, G4, etc$ serán GB ó BV, y finalmente, de $GY - G1 + G2 - G3 + etc$ se tendrá $BV - BV + BV - BV + etc = \frac{1}{2} BV$.

[385] Todo esto concuerda con la *Ley de la continuidad*, aplicable también a las leyes del movimiento, tal como yo propuse el primero hace tiempo en las *Nouvelles* literarias baylianas, a saber: *en las magnitudes continuas el extremo exclusivo puede ser tratado como inclusivo*, de manera que el caso último, aunque por su propia naturaleza sea distinto, se contiene (lateat) en la ley general de los otros y, al mismo tiempo, por una cierta razón paradójica o *figura filosófico-retórica*, por así decirlo, puede entenderse el punto incluido en la línea, el reposo en el movimiento, el caso especial en el general contradistinto, como si el punto fuera una línea infinitamente pequeña o evanescente, el reposo un movimiento evanescente, y otras cosas del mismo género, que *Joachim Jungius*, varón profundísimo, llamaba 'toleranter vera', y que contribuyen de manera importante al arte de la invención. Y aunque, en mi opinión, contienen algo de ficticio y de imaginario, no obstante, reducidas a expresiones ordinarias, se rectifica fácilmente el error, de forma que éste ya no puede encontrarse: pues la Naturaleza, procediendo siempre de forma ordenada y no por saltos, no puede violar la ley de la continuidad.

Pero es precisamente aquí donde se descubre la dificultad que tanto tú, excelente varón, como el excelente Marchetti habéis propuesto razonadamente. En efecto, como $BV - BV$, esto es, $1 - 1$, es 0, ¿no se sigue de aquí que $BV - BV + BV - BV + BV - BV + etc$ al infinito, esto es, $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + etc$ al infinito, no es sino 0+0+0+ etc? No se ve, pues, que el resultado pueda ser $\frac{1}{2}$. Grandi trata de eliminar la dificultad mediante un ingenioso símil. Imagina él que dos hermanos, que han de repartirse la herencia familiar, descubren en el legado paterno una perla de inmenso valor, pero que el testamento prohibe vender. Deciden, entonces, de común acuerdo colocarla en años alternos en el museo de cada uno de ellos. De esta manera, si suponemos que ha de mantenerse eternamente esta orden entre los herederos, entonces la línea sucesiva de cada uno de los hermanos, a quien se asignaría infinitas veces y otras tantas infinitas se le quitaría la perla, produciría para cada uno la mitad del derecho.

Pero considerando el problema con más detenimiento, la semejanza con nuestro caso falla demasiado. En *primer* lugar, porque en nuestro caso (según el propio Grandi) el problema depende del privilegio que tiene el infinito, que consiste, según él, en que desde la nada por repetición se llega a algo. Sin embargo, en el caso del reparto familiar, el problema permanece idéntico aunque el número de años sea finito. Imaginemos, por ejemplo, que la perla ha llegado a los dos hermanos no por herencia sino por donación de un amigo, y que no se trata de una propiedad perpetua sino sólo de su uso durante cien años. Es claro que, de este modo, el derecho de cada uno quedaría a salvo poseyéndola en años alternos. Pero en nuestro caso, [386] si ponemos cien unidades alternando adición y sustracción, esto es, si ponemos cincuenta veces $1 - 1$, como si lo hacemos cincuenta mil, siempre el resultado será 0.

En *segundo* lugar, la razón misma de la diferencia consiste en que, en el caso del derecho común de dos personas con posesión alternada, lo que se da y se quita no es el derecho total *in re*, sino el uso por un año y sólo de una parte de todo el derecho, de manera que, distribuido todo el derecho concedido a lo largo de los años hasta cien, es claro que el uso de un año no es sino la centésima parte del derecho íntegro; y así, como cada uno obtiene de este modo cincuenta centésimas, lo que tiene es la mitad de todo el derecho. Por el contrario, en nuestro caso lo que se da y se quita es la unidad misma, el todo mismo (no una parte). Así que la semejanza aquella, aunque sugestiva, nada tiene que ver en nuestro problema, si la consideramos más atentamente.

Busquemos, pues, ahora la verdadera, quizás inesperada pero singular, solución del *enigma* y de la *paradoja*, volviendo por un momento a la serie finita para pasar luego a la infinita. Hay que considerar que el caso de una serie finita contiene dos situaciones que deben ser distinguidas entre sí, hasta que, por una admirable razón en el caso de la serie infinita, se confunden. Quiero decir lo siguiente. La serie finita $1-1+1-1+etc$ puede explicarse de dos maneras: o consta de *un número par de miembros* y entonces termina con -, como por ejemplo
$1-1$, o también $1-1+1-1$, ó $1-1+1-1+1-1$, y hasta dondequiera que se prosiga, siempre el resultado será 0.

o consta de *un número impar de miembros*, y entonces termina en +, como por ejemplo 1, o también $1-1+1$, ó $1-1+1-1+1$, y hasta dondequiera que se prosiga, siempre el resultado será 1. Pero en la *serie infinita*, o sea, $1-1+1-1+1-1+etc$ al infinito, de manera que exceda cualquier número, la naturaleza del número se desvanece y, con ella, se desvanece también la asignabilidad de pares o impares; y no habiendo razón alguna para la paridad o la imparidad y, en consecuencia, para el resultado 0 más que para el 1, ocurre, por un admirable ingenio de la naturaleza, que con el tránsito de lo finito a lo infinito se produce también el tránsito de lo disyuntivo (que aquí desaparece) al uno positivo (que ahora permanece), que es el medio entre los disyuntivos. Ahora bien, quienes han estudiado las medidas de cantidades aleatorias han mostrado que, cuando hay que considerar el medio entre dos magnitudes que se sustentan en una equivalente razón, debe tomarse el medio aritmético, que es la mitad de la suma. Pues bien, también la naturaleza de las cosas cumple aquí la misma *ley de justicia*; y por lo tanto, como $1-1+1-1+1-1+etc$ en el caso finito de un número par de miembros es 0, pero en el caso finito de un número impar de miembros es 1, se sigue que, al desvanecerse ambos en el caso de miembros [387] infinitos en multitud, los derechos de lo par y de lo impar se confunden y tanta razón hay para uno como para el otro; en consecuencia, $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$, que era lo que se proponía.

Este tipo de argumento, aunque parezca más metafísico que matemático, es sin embargo fuerte: el uso de los cánones de la *Verdadera Metafísica* (que va más allá que la mera designación de vocablos) es en la matemática, en el Análisis e incluso en la Geometría, mayor de lo que comúnmente se cree. En el caso que nos ocupa, por ejemplo, y por la razón dada al comienzo (como cualquier ordenada GD es $\frac{1}{1+AG}$ y, por lo tanto, cuando AG se convierte en AV ó 1, entonces VS será $\frac{1}{1+1}$), sabemos, por una parte, que $VS=\frac{1}{2}BV$; pero, tomando G lo más próxima que queramos a V, tendremos también GD todo lo más próxima que queramos a $\frac{1}{2}BV$; y de esta manera, la diferencia podrá hacerse menor que cualquier magnitud dada; con lo que, siguiendo el modo de razonar arquimédeo, también se seguirá de aquí que $VS=\frac{1}{2}BV$. Como se ve, de la naturaleza misma tanto de las series como del infinito llegamos a la misma conclusión, lo que no sólo será un disfrute para nosotros sino algo extraordinariamente útil para elaborar razonamientos precisos sobre el infinito y descubrir más y más las fuentes de la nueva doctrina. Habrá que evitar, no obstante, que la nueva ciencia se desacredite con paradojas absolutamente indefendibles. Por eso, a la objeción según la cual de ninguna nada puede producirse algo no había que responder distinguiendo entre lo finito y lo infinito, como si la regla fallara en lo infinito, sino más bien, concedida la regla general, mostrando, como aquí se ha hecho, que su aplicación en este caso cesaba.