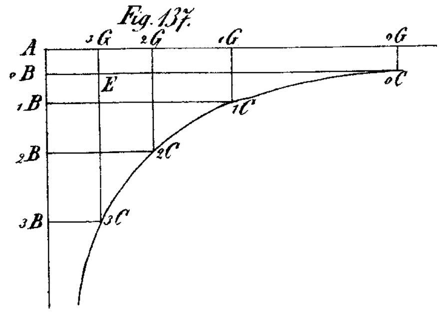
COMENTARIO DE LEIBNIZ A LA SOLUCIÓN DE JOHANN BERNOULLI A LA DIFICULTAD DE VOLDER SOBRE EL CÁLCULO DIFERENCIAL

(M III 519) Comentario de Leibniz a la solución de Bernoulli a la dificultad de de Volder contra el cálculo diferencial, GM.III 522-524: “Me parece que has resuelto perfectísimamente la objeción, por lo demás ingeniosa y elegante, de este ilustre varón contra el cálculo infinitesimal; en efecto, lo infinitamente pequeño está muy lejos de ser nulo. Y como la ecuación de la hipérbola es $xxy = a^3$, es claro que, si *x* es infinitamente pequeña, o sea, de primer grado, entonces y será respecto de *a* como *aa* respecto de *xx* y, por lo tanto, y será infinita, no de grado simple o primero, sino del próximo superior, esto es, del segundo grado; lo que no ocurre en la hipérbola simple, donde *y* es a *a* ordinaria como esta misma ordinaria a es a la infinitamente pequeña de primer grado *x*. Yo mismo formulé una objeción semejante hace ya mucho tiempo en el escolio de la proposición 22 de mi Tratado inédito que redacté en Francia sobre el *Tetragonismo Aritmético* poco después de haberlo descubierto, donde se ve que la objeción no sólo alcanza a nuestro cálculo sino igualmente a la Geometría convencional. Allí había demostrado (prop.18) que en una figura analítica simple (así llamaba yo a aquellas cuya ecuación, que expresa una relación ordinaria entre la ordenada y la abscisa, se compone sólo de dos miembros; tales son las paraboliformes y las hiperboliformes; o, de otro modo, donde algunas potencias de las abscisas son como algunas potencias de las ordenadas) (fig. 137), la zona ${}_1C\ {}_1B\ {}_2B\ {}_2C\ {}_1C$ es a su zona conjugada ${}_3C\ {}_3G\ {}_2G\ {}_2C\ {}_3C$ como el exponente de las potencias de las ordenadas *BC* es al exponente de las potencias a ellas proporcionales de las ordenadas conjugadas o abscisas *GC* o *AB*. De manera que en una hipérbola cónica las zonas son iguales; pero en aquella hiperboloide, que podríamos llamar antiparábola, donde las ordenadas están en razón inversa de la cuadratura de las abscisas, una zona será a su conjugada como *1* es a *2*, y así sucesivamente. De esta manera se presenta la dificultad, incluso en la misma hipérbola cónica: la zona ${}_3C\ {}_3B\ {}_2B\ {}_2C\ {}_3C$ es igual a la zona conjugada ${}_3C\ {}_3G\ {}_2G\ {}_2C\ {}_3C$ y la zona ${}_2C\ {}_2B\ {}_1B\ {}_1C\ {}_2C$ igual a su conjugada ${}_2C\ {}_2G\ {}_1G\ {}_1C\ {}_2C$, y así sucesivamente, suponiendo estas zonas comprendidas siempre dentro de líneas terminadas. De esta manera cualquier espacio horizontal se igualará siempre con su correspondiente vertical. Y todos los cuadrilíneos horizontales al infinito hasta *A* llenan el espacio cuadrilíneo infinito ${}_3C\ {}_3BAetc\ {}_3C$, y todos los conjugados respectivos verticales e iguales al infinito llenan el espacio trilíneo infinito ${}_3C\ {}_3Getc\ {}_3C$. Por lo tanto, estos dos espacio infinitos son iguales entre sí, la parte igual al todo, lo que es absurdo, porque el exceso del primero sobre el segundo es el rectángulo $A_3\ B_3\ C_3\ G$. Mi respuesta fue, ya entonces, que, así como lo indivisible o nulo en magnitud está muy lejos de ser lo infinitamente pequeño, así también lo interminado lo está de ser lo infinitamente grande; no se debe hablar aquí de un espacio absolutamente interminado o cuasi interminado, como ${}_3C\ {}_3BAetc\ {}_3C$, que está comprendido entre las rectas finitas ${}_3C\ {}_3B$, ${}_3BA$, la asíntota interminada *A* etc. y la curva interminada ${}_3Cetc$; y por eso, ni la última abscisa $A_0\ B$ es en rigor nula como si el *0* concurriera con *A*, ni la última ordenada *B C 0 0* es interminada como si ${}_0B\ {}_0C$ concurriera con la asíntota; sino que *A0 B* es infinitamente pequeña, y *0B 0C* es infinitamente grande, pero terminada; la media proporcional entre ellas es una cantidad ordinaria, a saber, el lado del cuadrado constante, que es igual a cualquier rectángulo *ABCG* y, por lo tanto, también igual al rectángulo *A0 B0 C0 G* , que es de longitud infinitamente grande y de altura infinitamente pequeña. De esta manera se resuelve la objeción, pues no son los dos espacios interminados mencionados más atrás (cuadrilíneo uno, trilíneo el otro) los que se igualan o se componen de cuadrilíleos (uno de horizontales, el otro de verticales), sino que ambos espacios infinitos deben ser cuadrilíneos y terminados, de manera que la zona horizontal total, ${}_3C\ {}_3B\ 0B\ 0C\ 3C$, se compone de los anteriores en número infinito, y la zona vertical total, ${}_3C\ {}_3G\ {}_0G\ {}_0C\ {}_3C$, se compone igualmente de los anteriores en número infinito, y ambas zonas, de longitud infinita pero terminada, se igualan entre sí. Esto vale también para la hipérbola cónica, puesto que en general



sabemos que su zona horizontal es igual a su correspondiente vertical: en efecto, si de ambas zonas sustraemos el trilíneo común ${}_3CE\ {}_0C\ {}_3C$, nos queda en la primera el rectángulo $A_3\ B_3\ C_3\ G$, y en la segunda el $A_0\ G_0\ C_0\ B$, que son rectángulos iguales, como es sabido". Véase en KNOBLOCH, a.c. p. 39-41, una explicación de la aparente paradoja de una línea infinitamente grande pero terminada. Ni el indivisible de Cavalieri o nulo en magnitud es lo infinitamente pequeño, ni lo interminado es lo infinitamente grande; es decir, ni la última abscisa *A B*0 es nula, ni la última ordenada B C 0 0 es interminada como si concurriera con la asíntota; es infinita pero terminada, esto es, está constituida por un conjunto de líneas finitas mayor que cualquiera asignable, pero cada línea finita se compone de líneas infinitamente pequeñas divisibles. Esto le permite a Leibniz dos cosas: a) establecer la línea finita como media proporcional entre lo infinito y lo infinitamente pequeño: $li : lf = lf : l_{ip} \Rightarrow lf^2 = li \times l_{ip}$. b) transformar un espacio absolutamente interminado (como la hipérbola común) en un espacio finito, esto es, una curva indeterminada en su cuadratriz o curva calculable, el teorema de transmutación (a. c. p. 43-45; cfr. también una sencilla y excelente exposición en DE LORENZO, J.: o.c.p. XXII-XXXVI ss). No se olvide, no obstante, que, como le dirá en el párrafo siguiente a Bernoulli, Leibniz entiende este trabajo sólo como algo ficticio o ideal, útil para el cálculo (cfr. supra nota 224).