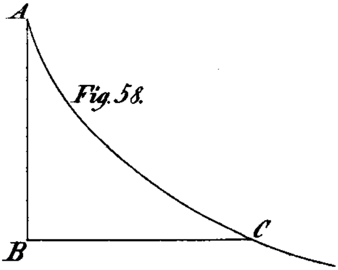
DEMOSTRACIÓN DE LA CURVA BRACHYSTOCHRONA DE LEIBNIZ Y JOHANN BERNOULLI (GM III 288-289)

(M III 288) He aquí como aborda Leibniz el problema de la *brachystochrona* (GM.III 288- 289): “Paso finalmente a tu problema de encontrar la línea que, en mi opinión, podríamos llamar “Tachystoptota” o de descenso más rápido. Sin duda, es éste un problema bellísimo y, aunque un poco a desgana y forzado, su belleza me ha atraído como a Eva la manzana. Me colocas ante una tentación a la vez excitante y onerosa, debilitado de fuerzas y abrumado por la mole de otras ocupaciones, hasta el extremo de que casi no me atrevo a ocuparme demasiado en trabajos que requieren una más intensa meditación. Así que, en adelante, tú propones los problemas, pues yo prefiero que alguien, sobre todo si eres tú, me enseñe las soluciones, antes que esperarlas de mí, aun a costa de parecerte más débil de lo que en realidad soy. Siento que estos trabajos, principalmente el cálculo (que para ti es bastante llevadero), debilitan no poco mis fuerzas y aumentan mis inoportunas flogosis. He aquí, no obstante, lo que he intentado no mediante series, pues éstas son subsidiarias como los triarios [los “triarios” eran soldados veteranos de la reserva en los ejércitos romanos], sino llevando el asunto a su ecuación diferencial, que es lo que solemos descubrir en las entrañas de este tipo de problemas. Digo, pues, que la naturaleza de la línea Tachystoptota *AC* (fig. 58) (en la que el grave desciende a la máxima velocidad desde el punto *A* al *C*) es tal que, haciendo constantes los incrementos de las abscisas o alturas, los elementos de las ordenadas o larguras *BC* estarán en razón compuesta directa de los elementos de la curva e inversa de los elementos de tiempo de las verticales. Llamo verticales a los tiempos elementales en los que el grave descendería en la vertical *AB*. De donde se sigue que los elementos mismos de la curva estarán en razón



compuesta directa simple de las larguras elementales e inversa de la raíz cuadrada de las alturas elementales. Así pues, si *AB* es *x*, *BC* es *y*, y tomamos como constante *b*, todo el problema se reduce a las cuadraturas y será $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2b-x}}$. Sea $\frac{dy}{dx}$ = v : b = $\sqrt{\frac{2bx-xx}{2b-x}}$. Digo que las velocidades, *v*, proporcionales a *dy*, se reducen a mi cuadratriz, que hace ya tiempo utilicé en mi Tetragonismo Aritmético, y que, por lo tanto, la curva tachystoptota es la cuadratriz de mi cuadratriz y, en consecuencia, depende de la dimensión circular. Pues si (fig. 59) con centro en *G*, radio *AG* o *b*, se describe el semicírculo *AHM*, y sobre el ángulo *AGH* se traza la bisectriz *GT* que corta en *T* a la tangente al vértice, y haciendo que *AB* sea *x* y, por lo tanto, *BH* sea ,$\sqrt{2bx - xx}$, entonces *AT* será v, es decir, será respecto de *b* o *AG* como *BH* o ,$\sqrt{2bx - xx}$ lo será de *BM* o *2b-x*. Ahora bien, si en *BH* (trácese, si es necesario) se toma *BN* igual a *AT*, tendremos que $\int vdx$ o área *ABNA* será igual al doble del segmento circular cuyo arco es *AH*. Por lo tanto, si el área *ABNA* o doble del segmento se aplica a la recta *b* (de manera que sea $\int vdx : b$), se producirá y, o sea, *BC*, que es la ordenada de la línea buscada *AC*. De donde se sigue que la Tachystoptota *AC* es la línea formada por los segmentos (que se separan de un mismo punto, o sea, del vértice), es decir, es la línea cuyas ordenadas son proporcionales a los segmentos circulares, con lo que, supuesto el tetragonismo de éstos, se puede describir fácilmente la curva por dos puntos dados.

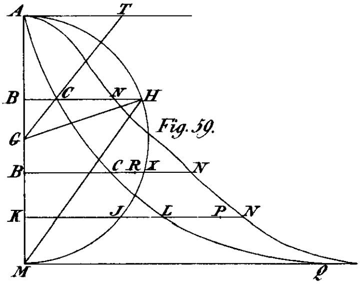
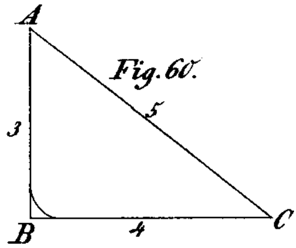


Fig. 59.

Añadiré ahora otro teorema, que me parece elegante y fácil para quien se fije en él, y que tal vez no te desagradará, pues se me ha ocurrido al estudiar tu problema. Es éste: si (fig. 60) colocamos lo que llaman triángulo rectángulo pitagórico, o sea, cuyos lados sean *3,4,5*, de forma que el lado menor esté en la perpendicular, entonces un grave que descienda por la vertical *AB* y, adquirido su ímpetu, continúe por la horizontal *BC,* llegará de *A* a *C* por los lados *AB,BC* en el mismo tiempo en que lo haría directamente por la hipotenusa *AC.* En la práctica conviene que el ángulo *B* esté un poco biselado en forma de curva cuyas tangentes sean *AB* y *BC*, a fin de que el grave pase de *AB* a *BC* sin violencia o impedimento; podría ser útil también que el ángulo *ABC* fuera un poco obtuso. Si *AB* es menos de $\frac{3}{4}$ de *BC*, el móvil andará su camino por los lados a más velocidad que por la hipotenusa; si es mayor, será más rápida la caída directa. Muchas más cosas de este tenor podríamos sacar de aquí, sobre las que ahora no me detengo.



***

(M III 298) He aquí íntegro el artículo donde Johann Bernoulli propone y demuestra la brachystochrona, Apéndice, GM.III 302-309:

Johann Bernoulli

Curvatura del rayo en medios no uniformes. Doble solución, la primera por invención analítica y la segunda por demostración sintética, del problema propuesto por el autor en las *Actas* de 1696, p.269, sobre el descubrimiento de la línea Brachystochrona, esto es, aquélla en la que un grave recorre la distancia de un punto dado a otro dado en el tiempo más breve, y construcción de la curva síncrona.

Tantos han sido hasta el presente los métodos ideados sobre aquello que llaman de *máximos* y *mínimos*, que apenas parece quedar respecto de esta materia nada sutil que no piensen haber llegado hasta su más extrema sutileza quienes se vanaglorian de ser sus inventores o los seguidores de los inventores. Juren, sin embargo, cuanto quieran por las palabras del maestro; pues verán, si quieren intentarlo, que nuestro problema no se circunscribe en modo alguno a los estrechos límites de sus métodos, que solamente se extienden a descubrir una cantidad *máxima* o *mínima* de entre las muchas o infinitas dadas. Lo que ocurre en nuestro caso es que las cantidades, de entre las que hay que elegir la máxima o la mínima, no están ellas mismas más determinadas que aquello que se busca; y ésta es la cuestión, éste es el objetivo. Acudan, pues, Descartes, Fermat, Roberval y todos cuantos en su tiempo pugnaron agudamente por la defensa, cada uno, de su propio método como quien defiende los bienes más sagrados y queridos, y reconozcan paladinamente dónde está la dificultad. No es mi estilo ni tampoco quiero aquí desprestigiar los inventos ajenos. Ellos prestaron grandes servicios y alcanzaron de manera excelente lo que se habían propuesto. Pero, dado que acerca de esta peculiar consideración de máximos y mínimos nada encontramos en sus escritos, es lógico que tampoco trataran de vendernos sus métodos más allá de lo que ellos podían resolver.

Por mi parte, tampoco prometo yo ningún método universal, que en vano buscaríamos, sino ciertas estrategias especialmente eficaces no sólo en éste sino también en otros muchos casos para los que he enunciado este problema, cuya solución, mientras otros buscaban otras, yo he sometido inmediatamente al celebérrimo Leibniz, a fin de que él la comunicara alguna vez al público junto con la suya, si es que la llegara a encontrar; de ello no dudaba, pues me consta más que de sobra el talento de este sagacísimo varón; y, en efecto, mientras esto escribo, me hace saber, por la correspondencia privada con la que continuamente me honra, que mi problema le ha satisfecho más allá de lo esperado y que (habiéndole atraído por su belleza, según dice, como a Eva la manzana) posee ya la solución. Qué es lo que otros podrán aportar, ya se verá; en todo caso, ha de ser un honor para los geómetras consagrar algo de su tiempo a resolver este problema, cuando un hombre tan grande, a pesar de sus múltiples ocupaciones, así lo ha entendido como para no considerar inútil invertir en él el suyo. Obtendrán, además, ellos como premio el haber tenido acceso a las más secretas verdades, que sin este problema seguramente no habrían alcanzado.

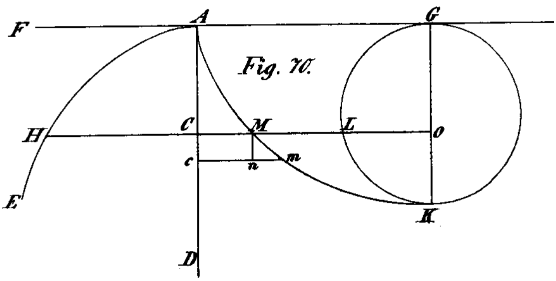
Nada hay que admiremos más que aquel descubrimiento que

Huygens hizo por primera vez: que en la cicloide común un móvil realiza descensos isócronos cualquiera que sea el punto de la cicloide desde el que empiece a moverse; pero no sé si uno no se asombrará todavía más, si afirmo que esta mismísima cicloide isócrona de Huygens es nuestra brachystochrona, a cuyo conocimiento he llegado yo por dos caminos, uno indirecto y otro directo. Refiriéndome al primero, he descubierto una admirable coincidencia entre la curvatura de un rayo de luz que se desplaza en un medio continuamente variable y nuestra curva brachystochrona, y he observado además algunos otros detalles, en los que se esconde no sé qué misterio que hará su aparición en la dióptrica. Por eso, entiendo que es verdad aquello que afirmé en la formulación de mi problema, a saber, "que no se trata de una mera especulación, sino que ha de tener el uso más fecundo en otras ciencias", como, por ejemplo, en la Dióptrica. Mas, a fin de confirmar con hechos lo que afirmo, he aquí mi primer modo de solución.

En su carta a De La Chambre (cfr. Corresp. Descartes. Edit.Lat.Tom.III,p.147, y Obras Matemáticas de Fermat, p.156ss) estableció Fermat que un rayo de luz que pasa de un medio menos denso a otro más denso se refracta hacia la perpendicular de manera que (suponiendo que se desplaza continuamente desde el punto luminoso hacia el punto iluminado) recorrerá , bajo el punto de vista del tiempo, el camino más breve; partiendo de este principio, mostraba él que el seno del ángulo de incidencia está, respecto del seno del ángulo de refracción, en razón directa de los medios menos densos o inversa de los más densos, esto es, en razón de las velocidades con las que el rayo penetra en los medios. Esto mismo lo demostraron después de manera más breve el agudísimo Leibniz en las *Acta Erudit.*1682, p.185ss, y el célebre Huygens en su *Tratado de la Luz,* p.40, y fundamentaron con poderosísimos argumentos el mismo principio físico o, mejor, metafísico que Fermat, satisfecho con su demostración geométrica y abdicando con excesiva facilidad de su derecho, parece que descuidó, presionado por Clerselier.

Si ahora concebimos nosotros un medio no uniformemente denso, sino formado horizontalmente por infinitas laminillas cuyos intersticios estén llenos de materia transparente [i.e. que deja pasar el rayo, NT] de rarefacción creciente o decreciente según una cierta razón, es manifiesto que el rayo, que consideraremos como una miniesfera, no caminará en línea recta sino en una curva (que ya Huygens había advertido en su *Tratado de la Luz*, pero no determinó su naturaleza) cuya naturaleza hará que la miniesfera, discurriendo por ella a una velocidad continuamente creciente o decreciente según el grado de rarefacción, llegue de un punto al otro en el tiempo más breve. Y como los senos de las refracciones en cada punto son como las rarefacciones del medio o las velocidades de la miniesfera, constará también que la curva tendrá la propiedad de que los senos de sus inclinaciones estarán, respecto de la línea vertical, siempre en la misma razón de las velocidades. Con estas premisas se descubre sin ninguna dificultad que la curva brachystochrona es precisamente aquélla misma que formaría un rayo desplazándose por un medio cuyas rarefacciones estuvieran en razón de las velocidades que alcanzaría un grave cayendo verticalmente. Pues tanto que los incrementos de las velocidades dependan de la naturaleza del medio más o menos resistente, como en el rayo, como que la aceleración se considere independientemente del medio o de otra causa, se entiende que el fenómeno se genera por la misma ley, como ocurre en el grave; y como en ambos casos se supone que la curva es recorrida en el tiempo más breve, ¿qué impedimento hay para que interpretemos una por la otra?

Será lícito, por lo tanto, resolver en sus términos generales nuestro problema, cualquiera que sea la ley de aceleración que establezcamos. Con ello, todo se reduce a averiguar la curvatura del rayo en un medio variable según sus rarefacciones, tal como queramos. Así pues, sea el medio *FGD* (fig. 70) limitado por la horizontal *FG*; En

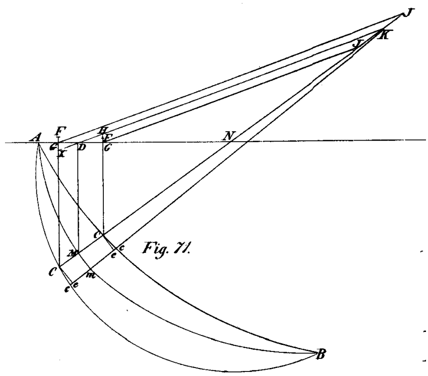


ella sea un punto radiante *A*, la vertical *AD* como eje de la curva dada *AHE*, cuyas aplicadas *HC* determinan las rarefacciones del medio en las alturas *AC* o las velocidades del rayo o miniesfera en los puntos *M*; y sea *AMB* el rayo curvado que se busca. Llamemos *x* a *AC*; *t* a *CH*, y *á CM*; *Cc, dx*, serán diferenciales; así mismo, diferenciales *nm, dy*; diferenciales *Mm, dz*; y una constante arbitraria *a*. Tomaremos *Mm* el radio, *mn* el seno del ángulo de refracción o inclinación de la curva hacia la vertical, y, por lo tanto, según lo que acabamos de decir, *mn* estará en razón constante respecto de *HC*, esto es, $dy.t = dz.a$; lo que sugiere la siguiente ecuación: $ady = tdz$, o también $aady^2 = ttdz^2 = ttdx2 + ttdy^2$, y reducida dará la ecuación general diferencial $dy = \frac{tdx}{\sqrt{aa-tt}}$ para la curva buscada *AMB*. De esta manera, y con una sola operación, se resuelven dos importantes problemas, uno óptico y el otro mecánico, más allá de lo que yo mismo pedía a los demás, y se demuestra a la vez que, aunque perteneciendo a dos partes de la matemática muy distintas, son sin embargo de la misma naturaleza.

Tomemos ahora un caso especial, por ejemplo la hipótesis común, introducida y demostrada primero por Galileo, según la cual las velocidades de los graves en caída son como la raíz cuadrada de las alturas recorridas, pues en esto consiste propiamente el quid de la cuestión. Bajo este supuesto, la curva dada AHE será una parábola, esto es, $tt = ax$ y $t = \sqrt{ax}$, y sustituyendo estas igualdades en la ecuación general, tendremos a $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, y de aquí concluyo que la curva brachystochrona será una cicloide común; pues si hacemos rodar sobre *AG* el círculo *GLK*, cuyo diámetro es *a*, teniendo como inicio de rotación el punto *A*, el punto *K* describirá una cicloide, y descubrimos que ésta tiene la misma ecuación diferencial $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, siendo AC, x; CM, y; esto mismo puede demostrarse a priori y de forma analítica así: dx $\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}} = \frac{-adx+2xdx}{2\sqrt{ax-xx}} + \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$; pero $\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{ax-xx}}$ es una cantidad diferencial cuya suma es $\sqrt{ax - xx}$ ó *LO*; y $\frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$ es la diferencial del arco *GL*; y por lo tanto, sumada la ecuación $dy= dx$

$\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, se tendrá y ó $CM = GL - LO$; y, por lo tanto, $MO = CO - GL + LO$; pero como (tomando CO = semicircunferencia GLK) $CO - GL = LK$, será $MO = LK + LO$, y eliminada la común LO, será $ML = LK$, lo que muestra que la curva *KMA* es la cicloide.

He aquí ahora el otro camino por el que he llegado directamente a la solución. Sea (fig. 71) *AL* la horizontal, desde la que desciende el grave. A esta horizontal la cortan oblicuamente las dos líneas *MK*, *mK*, que forman el ángulo infinitamente pequeño *MKm*; ahora, de todos los pequeños arcos concéntricos *Ce, Mm, Ce,* etc., que tienen centro en *K*, busco aquél, *Mm*, que el grave descendiendo desde la altura *DM* recorre en el tiempo más breve, y una vez conocido esto, tendré la relación entre *MN* y *NK*; pero es precisamente de estos infinitos pequeños arcos *Mm* de los que se compone la curva brachystochrona pedida *AMB* cuyo radio de círculo osculatorio es *MK*, y, determinado éste, se determina también la curva *AMB*.



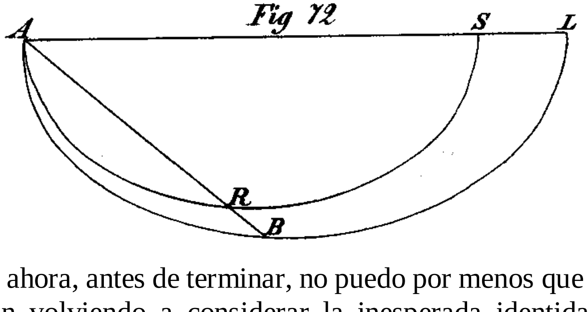
Ahora bien, como, según la común hipótesis galileana (cuya solución general omitimos aquí por brevedad, pues cualquiera a imitación suya puede verificarla sin ningún esfuerzo), las velocidades *C,M,C,* son como $\sqrt{CG}$, $\sqrt{MD}$, $\sqrt{CG}$, o como $\sqrt{CN}$, $\sqrt{MN}$, $\sqrt{CN}$; como los pequeños arcos *Ce, Mm, Ce,* son como los radios *CK, MK, CK*; y como los espacios divididos por las velocidades nos dan los tiempos, tendremos que los tiempos elementales por *Ce, Mm, Ce,* serán como $\frac{CK}{\sqrt{CN}}$, $\frac{MK}{\sqrt{MN}}$, $\frac{CK}{\sqrt{CN}}$; y como el tiempo elemental por *Mm* debe ser mínimo, tendremos (llamando *b* a *NK*, y *s* a *MN*) $\frac{MK}{\sqrt{MN}} = \frac{b+s}{\sqrt{s}}$= mínimo, y, por lo tanto, su diferencial será $\frac{-bds + sds}{2s\sqrt{s}} = 0$, de donde $s = b$. Por lo tanto, la curva buscada debe estar dotada de la propiedad de tener un radio del círculo osculatorio o, como dice Huygens, un radio de evoluta *MK* que sea doble de la porción *MN* comprendida entre el eje y la curva. Pero, tal como fue demostrado por el propio Huygens y otros, y si no fuera por atenernos a la brevedad, podríamos ahora hacer ver fácilmente *a priori*, esta es precisamente una propiedad de la cicloide. En consecuencia, también por este camino directo llegamos a la identidad entre la brachystochrona y la cicloide, lo que añade no poco valor a la verdad de lo que más atrás hemos dicho sobre la curvatura del rayo, principalmente ante aquellos que desconfían del razonamiento indirecto.

Mas, a fin de que puedan también comprenderlo quienes están menos familiarizados con nuestro método de calcular, dígnense leer con atención la siguiente demostración sintética que, siendo fácil y evidente para cualquiera, contiene sin embargo, a mi juicio, algo insólito e inesperado, y tal vez estimule a los curiosos a investigar con más penetración estos misterios.

Supongamos dos puntos dados *A* y *B*, por los que pasa una cicloide *AMB*, que tiene su inicio en el punto superior *A*. Digo que el móvil *M*, descendiendo libremente por su gravedad desde A por la cicloide *AMB*, llegará a *B* en un tiempo más breve que si descendiera desde el punto *A* al *B* por cualquiera otra de las curvas *ACB*, superior o inferior a la descrita. Sean *MK*, *mK*, dos normales lo más próximas a la cicloide, que cortan a la línea *ACB* en los puntos *C*, *c*, y concurren en *K*, que es el centro desde el que se describe el pequeño arco *Cc*. Tracemos *MD*, *CG*, perpendiculares a la horizontal *AL*, juntando *DK* a la secante *CG* en *H* tracemos la paralela *GJ*, y finalmente tomemos, respecto de *MD*, *CH* como tercera proporcional a *CF*. Ahora bien, según la propiedad de la cicloide, será *MN* = *NK*, y por lo tanto *CN* = *NJ*, y como ĩ*CN* + ĩ*NK*> ĩ *2 CNK*, tendremos que ĩ*CN* + ĩ*NK* + □ *2 CNK*, esto es, ĩ*CK*> ĩ *4 CNK* = ĩ*MKÅ~CJ*; luego *MKÅ~CK<CKÅ~CJ*; pero *MK.CK::MD.CH::CH.CF*, y *CK.CJ::CH.CG*, y por lo tanto *CH.CF<CH.CG*, y en consecuencia *CG<CF*. Ahora bien, de acuerdo con las reglas de los graves en caída, sabemos que el elemento de tiempo que un grave descendiendo desde la horizontal requiere para

recorrer la pequeña línea *Mm* es al tiempo elemental que el grave en descenso desde la misma horizontal requiere para recorrer el pequeño arco *Cc* como la razón compuesta simple directa de los espacios elementales a recorrer *Mm*, *Cc*, e inversa de la raíz cuadrada de las alturas *MD,CG*: esto es, el tiempo para *Mm* es al tiempo para *Cc* como $\frac{Mm}{\sqrt{MD}}.\frac{Cc}{\sqrt{CG}}$ :: (al ser *Mm.Ce*:: *MK.CK::MD.CH::* $\sqrt{MD}.\ \sqrt{CF}$) $\frac{\sqrt{MD}}{\sqrt{MD}}.\frac{\sqrt{CF}}{\sqrt{CG}}$ :: $\sqrt{CG}.\ \sqrt{CF}$; y como *CG* se ha mostrado menor que *CF*, también el tiempo para *Mm* será menor que el tiempo para *Ce* y, con mayor razón, menor que el tiempo para *Cc*, que es la hipotenusa del triángulo rectángulo *Cec*. Por lo tanto, el tiempo para todos los *Mm*. esto es, para la cicloide *AMB* será menor que el tiempo para todos los *Cc*, esto es, para la línea *AcB*. Q.E.D.

Queda aún por demostrar (para dar completa satisfacción al problema) cómo desde un punto dado como vértice habremos de trazar la brachystochrona, o sea, cómo ha de pasar la cicloide por otro punto dado. Se hace así de la manera más fácil. Unamos dos puntos dados *A* y *B*, (fig. 72) mediante la recta *AB*, y sobre la horizontal *AL* tracemos una cicloide cualquiera, que toma su inicio en *A* y corta la recta *AB* en *R;* hecho esto, hagamos que *AR* sea a *AB* como el diámetro *ARS* del círculo generador de la cicloide sea a la cuarta proporcional, que resultará ser el diámetro del círculo generador de la cicloide buscada *ABL*, que pasará por *B*.

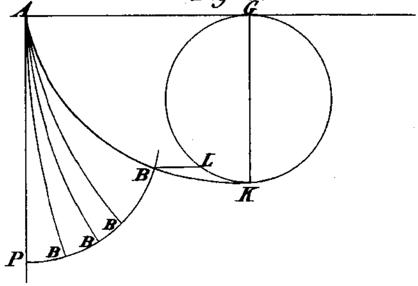


Y ahora, antes de terminar, no puedo por menos que reiterar mi admiración volviendo a considerar la inesperada identidad entre la isócrona de Huygens y nuestra brachystochrona. Y lo que aquí es más sorprendente es que tal identidad reside solamente bajo la hipótesis de

Galileo, de manera que, si nos es lícito suponer que ésta es conforme a la naturaleza y sabemos que la naturaleza suele obrar de la manera más simple, podemos afirmar que también aquí con una única línea ha querido cumplir dos funciones, mientras que en cualquier otra hipótesis habría necesitado dos líneas, una para las oscilaciones isócronas, y otra para el descenso más rápido. Si, por ejemplo, las velocidades de los graves en caída no fueran como la raíz cuadrada, sino como la cúbica, de las alturas, la brachystochrona sería una curva algebraica y la isócrona una transcendente; mientras que si las velocidades fueran como las alturas, ambas serían algebraicas, la primera circular y la segunda recta.

Espero no molestar a los geómetras si, a modo de apéndice, les ofrezco la solución de otro problema igualmente digno de consideración, que me ha venido a la mente con ocasión del anterior. En un plano vertical se busca una curva *PB* (fig. 73) (a la que podríamos llamar *síncrona*) tal que un grave descendiendo desde *A* por distintas cicloides conterminadas todas ellas, *AB*, llegue en el mismo tiempo a cada uno de los puntos *B* pertenecientes a la curva. Sea *AG* la horizontal y *AP* la vertical; el sentido del problema es que, definida sobre *AG* una cicloide cualquiera, se corte en ella la porción *AB* de forma que el grave en descenso requiera para recorrerla desde *A* el mismo tiempo que necesitaría para hacerlo desde una determinada altitud vertical *AP*; terminado el recorrido, el punto *B* estará en la curva síncrona *PB* que buscamos.

Fig. 73.



Si se considera atentamente lo que más arriba hemos dicho acerca del rayo de luz, no será difícil descubrir que esta última curva es la misma que Huygens en su *Tratado de la Luz,* pag.44 representa en su esquema gráfico mediante la línea *BC*, a la que llama “onda”, la cual, como él dice muy bien, corta como normal a todos los rayos que emanan del punto luminoso; pues bien, igualmente nuestra curva *PB* contacta formando ángulos rectos con las cicloides *AB* que tienen el mismo inicio *A*. Ahora bien, si hubiéramos querido reducir este problema a su formulación puramente geométrica, a saber, encontrar aquella curva que corta como normal a todas las cicloides de un mismo inicio, habría sido empresa de gran dificultad, por no decir insuperable para los geómetras. Mientras que considerado el problema desde el descenso de los graves, se establece así de la forma más sencilla: Sea *GLK* el círculo generador de la cicloide *ABK*, y *GK* su diámetro; seleccionamos el arco *GL* igual a la media proporcional entre una determinada recta dada *AP* y el diámetro *GK*; digo que la recta trazada LB, paralela a la horizontal *AG*, corta a la cicloide *ABK* en el punto *B*, que estará en la curva síncrona buscada *PB*. Quien desee probar su método en otras curvas, busque la línea que corte en ángulos rectos a otras curvas dadas (no algebraicas, que esto no sería difícil, sino transcendentes, por ejemplo, logarítmicas) que, en posición ordenada, se construyan sobre un eje común y desde un mismo punto". [Véase, infra, carta de Johann Bernoulli a Leibniz, 7 junio 1697, pag.414-420, las consecuencias que Johann extrae de estos teoremas para resolver los dos problemas con los que Jacob le retará meses después].