

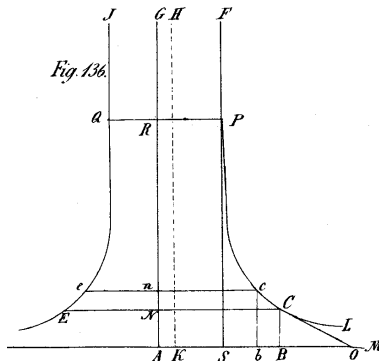
RESPUESTA DE JOHANN BERNOULLI A LAS OBJECIONES DE BURCHER DE VOLDER SOBRE EL CÁLCULO DIFERENCIAL (GM III 519-520)

(M III 517) He aquí la traducción de la respuesta de Johann Bernoulli a la objeción de de Volder sobre el cálculo diferencial. Apéndice, GM.III 519-520.

Extracto de la carta de Johann Bernoulli a de Volder
27 junio 1698

Tal como prometí, te envío aquí la solución a la dificultad que poco antes de mi partida me propusiste contra el método de los infinitos. Apenas había puesto el pie en el barco camino de La Haya cuando, dejando aparte otras muchas consideraciones de nuestros coloquios que todavía me rondaban, descubrí por dónde se escondía la serpiente bajo la hierba, y vi que tu dificultad adolecía de un defecto: había una cantidad a la que tú lógicamente no atendías, pues la eliminabas como si fuera nada, cuando en realidad no sólo contiene algo de finito, sino que ella misma es exactamente infinita, como ahora mostraré. Tu argumentación venía a ser la siguiente: “Sean (fig. 136) AG , AM , las asíntotas de la hipérbola FCL , cuya naturaleza (haciendo $AB=x$, $BC=y$) se expresa por la ecuación $xy = a^3$; consta que la subtangente $BO = \frac{1}{2}AB$; por lo tanto, si CN ,

paralela a AB , se prolonga hacia E , de manera que $NE=BO$, o sea, la mitad de AB , y si esto se verifica a todo lo largo del recorrido, se generará una nueva hipérbola IQE , cuyo elemento En del área será igual al elemento correspondiente Cb del área de la hipérbola anterior; de manera que el sumatorio de los elementos será el área $NRQE$, igual al área



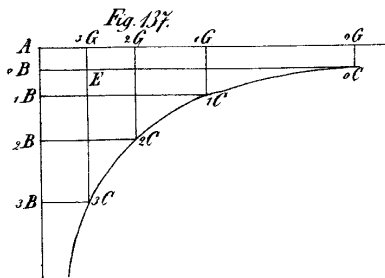
correspondiente *SBCP*”. Hasta aquí perfecto, y admitido por todo el mundo. Pero tú añades: “dado que *AS* es arbitraria, dondequiera que se encuentre el punto *S*, siempre será $SBCP=NRQE$, y podremos poner $AS=0$, con lo que se seguirá que todo el espacio asintótico *GABCF* extendido hasta el infinito será igual a todo el otro espacio asintótico *GNEI* extendido igualmente hasta el infinito; ahora bien, como a lo largo de todo el recorrido *NC*, *RP*, etc. son el doble de *NE*, *RQ*, etc. y, en consecuencia, también el espacio *GNCF* es el doble del espacio *GNEI*, también será con mayor razón el espacio *GABCF* por lo menos doble que el espacio *GNEI* y, por lo tanto, estos dos espacios no pueden ser iguales, contra nuestro primer razonamiento; ¿cómo se concilia todo esto?”.

Aquí está, si no me engaño, el sentido de tu objeción, a la que voy a responder brevemente invitándote a que consideres que *AS* nunca puede tomarse como absolutamente igual a 0, pues el punto *P* siempre debe contenerse en la hipérbola, pero nunca en la asíntota *AG*; y aunque podemos siempre entenderlo separándose del punto *C* hasta el infinito de manera que se acerque a la asíntota con más proximidad que cualquier otro punto asignable, sin embargo nunca su distancia respecto del infinito se desvanece por completo, sino que será algo, aunque infinitamente exiguo. Esto se ve claramente por el hecho de que, por definición, el sólido formado por *PS* y *AS*² debe igualarse al cubo constante a^3 ; pero esto no podría darse, a menos que ambas cantidades, tanto *AS* como *PS*, fueran algo real, puesto que de lo no-cuanto o absolutamente nada, multiplicado por una cantidad, aunque fuera ésta infinita, no se puede producir algo. Entendido bien todo esto, niego que del primer razonamiento se siga que el espacio *GABCF* sea igual al espacio *GNEI*, puesto que de él lo único que se puede concluir es que, tomada la recta *AK* infinitamente pequeña y trazada *KH* paralela a la asíntota, debe verificarse que el espacio *GNEI* sea igual al espacio *HKBCF*, lo que no tiene nada de absurdo ni implica contradicción alguna, sino que más bien confirma excelentemente la validez del cálculo diferencial e integral; y como, por el segundo razonamiento, el espacio *GNCF* o *GABCF* es el doble del espacio *GNEI*, y éste, como se acaba de ver, es igual al espacio *HKBCF*, se sigue que *GABCF* es el

doble de HKBCF y, por lo tanto, GAKH (esto es, el rectángulo formado por la abscisa infinitamente pequeña AK y la aplicada infinita KH) es == también al espacio HKBCF == (añadida la cantidad finita MBCL a la infinita HKBCF) == HKMLCF; y, en general (como ya advirtieron Roberval, Cavalieri, Pascal, Fermat, Wallis y otros, y se obtiene muy fácilmente con el cálculo diferencial) es verdad que el rectángulo formado por la abscisa AS y la aplicada PS es igual al espacio hiperbólico MSPCL. No debe, pues, parecerte extraño ni infundir por ello sospecha alguna sobre el método de las diferenciales el hecho de que el rectángulo AKH de lado AK infinitamente exiguo se nos muestre igual al espacio infinito AKMLCF, puesto que el que este rectángulo sea realmente infinito a pesar de que tenga un lado infinitamente pequeño, se pone de manifiesto en la ecuación misma de la hipérbola $xy = a^2$, que, expresada en una proporción nos da $x:a::a:xy$; de donde, si x , o sea, AK es infinitamente pequeña, esto es, infinitamente menor que la determinada y finita a , será igualmente xy , esto es, su cuadrado finito, infinitamente menor que xy , y, por lo tanto, xy , o sea, el rectángulo AKH será realmente infinito. De manera semejante debe pensarse cuando se trata de cualquier otra hipérbola $x^n y = a^{n+1}$; pues si n es mayor que la unidad, aparecerá siempre tu dificultad, toda vez que entonces el rectángulo AKH se hace infinito y es comparable con el espacio HKBCF y, por lo tanto, no debe despreciarse; pero si, al contrario, n es menor o igual que la unidad, la objeción desaparece, puesto que entonces el rectángulo AKH se hace infinitamente pequeño o finito incomparable con el espacio HKBCF y puede, por lo tanto, tranquilamente despreciarse. Verás así la validez de la respuesta que aquí he dado a tu dificultad; no dudo de que te satisfará”. Cfr. un estudio excelente y conciso de este problema de la hipérbola y las cuestiones resultantes, relacionadas con la cuadratura leibniziana, en KNOBLOCH, E.: “L’infini dans les mathématiques de Leibniz”, en LAMARRA, A (ED):. o.c.p.33-51. Una objeción semejante fue propuesta por Jacob Hermann, cfr. infra nota 688.

COMENTARIO DE LEIBNIZ A LA SOLUCIÓN DE JOHANN BERNOULLI A LA DIFICULTAD DE VOLDER SOBRE EL CÁLCULO DIFERENCIAL

(M III 519) Comentario de Leibniz a la solución de Bernoulli a la dificultad de de Volder contra el cálculo diferencial, GM.III 522-524: “Me parece que has resuelto perfectísimamente la objeción, por lo demás ingeniosa y elegante, de este ilustre varón contra el cálculo infinitesimal; en efecto, lo infinitamente pequeño está muy lejos de ser nulo. Y como la ecuación de la hipérbola es $xy = a^3$, es claro que, si x es infinitamente pequeña, o sea, de primer grado, entonces y será respecto de a como aa respecto de xx y, por lo tanto, y será infinita, no de grado simple o primero, sino del próximo superior, esto es, del segundo grado; lo que no ocurre en la hipérbola simple, donde y es a a ordinaria como esta misma ordinaria a es a la infinitamente pequeña de primer grado x . Yo mismo formulé una objeción semejante hace ya mucho tiempo en el esolio de la proposición 22 de mi Tratado inédito que redacté en Francia sobre el *Tetragonismo Aritmético* poco después de haberlo descubierto, donde se ve que la objeción no sólo alcanza a nuestro cálculo sino igualmente a la Geometría convencional. Allí había demostrado (prop.18) que en una figura analítica simple (así llamaba yo a aquellas cuya ecuación, que expresa una relación ordinaria entre la ordenada y la abscisa, se compone sólo de dos miembros; tales son las paraboliformes y las hiperboliformes; o, de otro modo, donde algunas potencias de las abscisas son como algunas potencias de las ordenadas) (fig. 137), la zona $1C_1B_2B_2C_1C$ es a su zona conjugada $3C_3G_2G_2C_3C$ como el exponente de las potencias de las ordenadas BC es



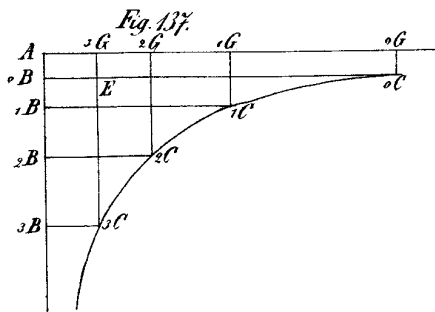
al exponente de las potencias a ellas proporcionales de las ordenadas conjugadas o abscisas GC o AB . De manera que en una hipérbola cónica las zonas son iguales; pero en aquella hiperboloide, que podríamos llamar antiparábola, donde las ordenadas están en razón inversa de la cuadratura de las abscisas, una zona será a su conjugada como 1 es a 2 , y así sucesivamente. De esta manera se presenta la dificultad, incluso

en la misma hipérbola cónica: la zona ${}_3C {}_3B {}_2B {}_2C {}_3C$ es igual a la zona conjugada ${}_3C {}_3G {}_2G {}_2C {}_3C$ y la zona ${}_2C {}_2B {}_1B {}_1C {}_2C$ igual a su conjugada ${}_2C {}_2G {}_1G {}_1C {}_2C$, y así sucesivamente, suponiendo estas zonas comprendidas siempre dentro de líneas terminadas. De esta manera cualquier espacio horizontal se igualará siempre con su correspondiente vertical. Y todos los cuadrilíneos horizontales al infinito hasta A llenan el espacio cuadrilíneo infinito ${}_3C {}_3BAetc {}_3C$, y todos los conjugados respectivos verticales e iguales al infinito llenan el espacio trilíneo infinito ${}_3C {}_3Getc {}_3C$. Por lo tanto, estos dos espacio infinitos son iguales entre sí, la parte igual al todo, lo que es absurdo, porque el exceso del primero sobre el segundo es el rectángulo $A {}_3B {}_3C {}_3G$. Mi respuesta fue, ya entonces, que, así como lo indivisible o nulo en magnitud está muy lejos de ser lo infinitamente pequeño, así también lo interminado lo está de ser lo infinitamente grande; no se debe hablar aquí de un espacio absolutamente interminado o cuasi interminado, como ${}_3C {}_3BAetc {}_3C$, que está comprendido entre las rectas finitas ${}_3C {}_3B$, ${}_3BA$, la asíntota interminada A etc. y la curva interminada ${}_3Cetc$; y por eso, ni la última abscisa $A {}_0B$ es en rigor nula como si el 0 concurriera con A , ni la última ordenada $B {}_0C {}_00$ es interminada como si ${}_0B {}_0C$ concurriera con la asíntota; sino que $A {}_0B$ es infinitamente pequeña, y $OB {}_0C$ es infinitamente grande, pero terminada; la media proporcional entre ellas es una cantidad ordinaria, a saber, el lado del cuadrado constante, que es igual a cualquier rectángulo $ABCG$ y, por lo tanto, también igual al rectángulo $A {}_0B {}_0C {}_0G$, que es de longitud infinitamente grande y de altura infinitamente pequeña. De esta manera se resuelve la objeción, pues no son los dos espacios interminados mencionados más atrás (cuadrilíneo uno, trilíneo el otro) los que se igualan o se componen de cuadrilíneos (uno de horizontales, el otro de verticales), sino que ambos espacios infinitos deben ser cuadrilíneos y terminados, de manera que la zona horizontal total, ${}_3C {}_3B {}_0B {}_0C {}_3C$, se compone de los anteriores en número infinito, y la zona vertical total, ${}_3C {}_3G {}_0G {}_0C {}_3C$, se compone igualmente de los anteriores en número infinito, y ambas zonas, de longitud infinita pero terminada, se igualan entre sí. Esto vale también para la hipérbola cónica, puesto que en general sabemos que su zona horizontal es igual a su correspondiente vertical: en efecto, si de ambas zonas sustraemos el trilíneo común ${}_3CE {}_0C {}_3C$, nos queda en la primera

el rectángulo $A_3 B_3 C_3 G$, y en la segunda el $A_0 G_0 C_0 B$, que son rectángulos iguales, como es sabido”. Véase en KNOBLOCH, a.c. p. 39-41, una explicación de la aparente paradoja de una línea infinitamente grande pero terminada. Ni el indivisible de Cavalieri o nulo en magnitud es lo infinitamente pequeño, ni lo interminado es lo infinitamente grande; es decir, ni la última abscisa $A B_0$ es nula, ni la última ordenada $B C_0$ es interminada como si concurriera con la asíntota; es infinita pero terminada, esto es, está constituida por un conjunto de líneas finitas mayor que cualquiera asignable, pero cada línea finita se compone de líneas infinitamente pequeñas divisibles. Esto le permite a Leibniz dos cosas: a) establecer la línea finita como media proporcional entre lo infinito y lo infinitamente pequeño: $li : lf = lf : l_{ip} \Rightarrow lf^2 = li \times l_{ip}$. b) transformar un espacio absolutamente interminado (como la hipérbola común) en un espacio finito, esto es, una curva indeterminada en su cuadratriz o curva calculable, el teorema de transmutación (a. c. p. 43-45; cfr. también una sencilla y excelente exposición en DE LORENZO, J.: o.c.p. XXII-XXXVI ss). No se olvide, no obstante, que, como le dirá en el párrafo siguiente a Bernoulli, Leibniz entiende este trabajo sólo como algo ficticio o ideal, útil para el cálculo (cfr. supra nota 224)

COMENTARIO DE LEIBNIZ A LA SOLUCIÓN DE JOHANN BERNOULLI A LA DIFICULTAD DE VOLDER SOBRE EL CÁLCULO DIFERENCIAL

(M III 519) Comentario de Leibniz a la solución de Bernoulli a la dificultad de de Volder contra el cálculo diferencial, GM.III 522-524: “Me parece que has resuelto perfectísimamente la objeción, por lo demás ingeniosa y elegante, de este ilustre varón contra el cálculo infinitesimal; en efecto, lo infinitamente pequeño está muy lejos de ser nulo. Y como la ecuación de la hipérbola es $xy = a^3$, es claro que, si x es infinitamente pequeña, o sea, de primer grado, entonces y será respecto de a como aa respecto de xx y, por lo tanto, y será infinita, no de grado simple o primero, sino del próximo superior, esto es, del segundo grado; lo que no ocurre en la hipérbola simple, donde y es a a ordinaria como esta misma ordinaria a es a la infinitamente pequeña de primer grado x . Yo mismo formulé una objeción semejante hace ya mucho tiempo en el escolio de la proposición 22 de mi Tratado inédito que redacté en Francia sobre el *Tetragonismo Aritmético* poco después de haberlo descubierto, donde se ve que la objeción no sólo alcanza a nuestro cálculo sino igualmente a la Geometría convencional. Allí había demostrado (prop.18) que en una figura analítica simple (así llamaba yo a aquellas cuya ecuación, que expresa una relación



ordinaria entre la ordenada y la abscisa, se compone sólo de dos miembros; tales son las paraboliformes y las hiperboliformes; o, de otro modo, donde algunas potencias de las abscisas son como algunas potencias de las ordenadas) (fig. 137), la zona $1C 1B 2C 1C$ es a su zona conjugada $3C 3G 2G 2C 3C$ como

el exponente de las potencias de las ordenadas BC es al exponente de las potencias a ellas proporcionales de las ordenadas conjugadas o abscisas GC o AB . De manera que en una hipérbola cónica las zonas son iguales; pero en aquella hiperboloide, que podríamos llamar antiparábola, donde las ordenadas están en razón inversa de la cuadratura de las abscisas, una zona será a su conjugada como 1 es a 2, y así sucesivamente. De esta manera se presenta la dificultad, incluso en la misma hipérbola cónica: la zona ${}_3C {}_3B {}_2B {}_2C {}_3C$ es igual a la zona conjugada ${}_3C {}_3G {}_2G {}_2C {}_3C$ y la zona ${}_2C {}_2B {}_1B {}_1C {}_2C$ igual a su conjugada ${}_2C {}_2G {}_1G {}_1C {}_2C$, y así sucesivamente, suponiendo estas zonas comprendidas siempre dentro de líneas terminadas. De esta manera cualquier espacio horizontal se igualará siempre con su correspondiente vertical. Y todos los cuadrilíneos horizontales al infinito hasta A llenan el espacio cuadrilíneo infinito ${}_3C {}_3BAetc {}_3C$, y todos los conjugados respectivos verticales e iguales al infinito llenan el espacio trilíneo infinito ${}_3C {}_3Getc {}_3C$. Por lo tanto, estos dos espacio infinitos son iguales entre sí, la parte igual al todo, lo que es absurdo, porque el exceso del primero sobre el segundo es el rectángulo $A_3 B_3 C_3 G$. Mi respuesta fue, ya entonces, que, así como lo indivisible o nulo en magnitud está muy lejos de ser lo infinitamente pequeño, así también lo interminado lo está de ser lo infinitamente grande; no se debe hablar aquí de un espacio absolutamente interminado o cuasi interminado, como ${}_3C {}_3BAetc {}_3C$, que está comprendido entre las rectas finitas ${}_3C {}_3B$, ${}_3BA$, la asíntota interminada A etc. y la curva interminada ${}_3Cetc$; y por eso, ni la última abscisa $A_0 B$ es en rigor nula como si el 0 concurriera con A , ni la última ordenada $B C 0 0$ es interminada como si ${}_0B {}_0C$ concurriera con la asíntota; sino que $A_0 B$ es infinitamente pequeña, y ${}_0B {}_0C$ es infinitamente grande, pero terminada; la media proporcional entre ellas es una cantidad ordinaria, a saber, el lado del cuadrado constante, que es igual a cualquier rectángulo $ABCG$ y, por lo tanto, también igual al rectángulo $A_0 B_0 C_0 G$, que es de longitud infinitamente grande y de altura infinitamente pequeña. De esta manera se resuelve la objeción, pues no son los dos espacios interminados mencionados más atrás (cuadrilíneo uno, trilíneo el otro) los que se igualan o se componen de cuadrilíneos (uno de horizontales, el otro de verticales), sino que ambos espacios infinitos deben ser cuadrilíneos y terminados, de manera que

la zona horizontal total, ${}_3C {}_3B {}_0B {}_0C {}_3C$, se compone de los anteriores en número infinito, y la zona vertical total, ${}_3C {}_3G {}_0G {}_0C {}_3C$, se compone igualmente de los anteriores en número infinito, y ambas zonas, de longitud infinita pero terminada, se igualan entre sí. Esto vale también para la hipérbola cónica, puesto que en general sabemos que su zona horizontal es igual a su correspondiente vertical: en efecto, si de ambas zonas sustraemos el trilíneo común ${}_3CE {}_0C {}_3C$, nos queda en la primera el rectángulo $A {}_3 B {}_3 C {}_3 G$, y en la segunda el $A {}_0 G {}_0 C {}_0 B$, que son rectángulos iguales, como es sabido". Véase en KNOBLOCH, a.c. p. 39-41, una explicación de la aparente paradoja de una línea infinitamente grande pero terminada. Ni el indivisible de Cavalieri o nulo en magnitud es lo infinitamente pequeño, ni lo interminado es lo infinitamente grande; es decir, ni la última abscisa $A B {}_0$ es nula, ni la última ordenada $B C {}_0 {}_0$ es interminada como si concurriera con la asíntota; es infinita pero terminada, esto es, está constituida por un conjunto de líneas finitas mayor que cualquiera asignable, pero cada línea finita se compone de líneas infinitamente pequeñas divisibles. Esto le permite a Leibniz dos cosas: a) establecer la línea finita como media proporcional entre lo infinito y lo infinitamente pequeño: $li : lf = lf : l_{ip} \Rightarrow lf^2 = li \times l_{ip}$. b) transformar un espacio absolutamente interminado (como la hipérbola común) en un espacio finito, esto es, una curva indeterminada en su cuadratriz o curva calculable, el teorema de transmutación (a. c. p. 43-45; cfr. también una sencilla y excelente exposición en DE LORENZO, J.: o.c.p. XXII-XXXVI ss). No se olvide, no obstante, que, como le dirá en el párrafo siguiente a Bernoulli, Leibniz entiende este trabajo sólo como algo ficticio o ideal, útil para el cálculo (cfr. supra nota 224).